SVEUČILIŠTE U RIJECI

TEHNIČKI FAKULTET

KONAČNOELEMENTNI MODEL ZA ANALIZU IZVIJANJA KOMPOZITNIH GREDNIH KONSTRUKCIJA

Doktorska disertacija

Igor Pešić

Rijeka, 2012.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
TEHNIČKI FAKULTET

KONAČNOELEMENTNI MODEL ZA ANALIZU IZVIJANJA KOMPOZITNIH GREDNIH KONSTRUKCIJA

Doktorska disertacija

Igor Pešić

Mentor: Izv. prof. dr. sc. Domagoj Lanc

Rijeka, 2012.

Sveučilište u Rijeci
TEHNIČKI FAKULTET
-Fakultetsko vijeće-
Klasa: 602-04/08-02/20
Ur. br.: 2170-57-43-08-41
Rijeka, 29. rujna 2008.

Fakultetsko vijeće Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na svojoj 20. sjednici u akad. god. 2007./08./09./10., održanoj 26. rujna 2008., donijelo je sljedeću

ODLUKU

Sukladno izvješću Stručnog povjerenstva, u sastavu: red. prof. dr. sc. Goran Turkalj, red. prof. dr. sc. Josip Brnić i doc. dr. sc. Domagoj Lanc te pozitivne ocjene prijave i obrane teme doktorskog rada, utvrđuje se da pristupnik ***Igor Pešić, dipl. ing.*** ispunjava Zakonom propisane uvjete za prijavu i izradu teme doktorske disertacije naslovljene:

„Konačnoelementni model za analizu izvijanja kompozitnih grednih konstrukcija"

Mentorom se imenuje doc. dr. sc. Domagoja Lanca.

Dekan

Prof. dr. sc. Tonči Mikac, mag. ing. mech.

REPUBLIKA HRVATSKA 1 SVEUČILIŠTE U RIJECI TEHNIČKI FAKULTET RIJEKA

Dostaviti:

1. Igor Pešić, dipl. ing.
2. Mentor, doc. dr. sc. Domagoj Lanc
3. Služba studentske evidencije, ovdje
4. Pismohrana FV

Mojim roditeljima.

(konačno su me odškolovali)

Sažetak

U ovom radu prikazana je konačno-elementna analiza stabilnosti tankostijenih kompozitnih grednih konstrukcija. Korišten je gredni konačni element pod pretpostavkom velikih pomaka, ali malih deformacija. Izvedena je linearna i nelinearna analiza stabilnosti. Kod linearne analize korišteno je nelinearno polje pomaka koje uzima u obzir efekte velikih rotacija, a kod nelinearne analize implementirana je korotacijska formulacija koja je linearna na nivou elementa, a geometrijska nelinearnost se uvodi transformacijom iz lokalnog u globalni koordinatni sistem. Lokalni koordinatni sistem prati gredni konačni element i dopušta pojednostavljene konstitutivne jednadžbe na nivou lokalnog elementa. Korištena je klasična laminatna teorija za kompozite ojačane vlaknima. Model je primjenjiv na različite poprečne presjeke, rasporede slaganja slojeva laminata i rubne uvjete. Korištena je pretpostavka da je kutna deformacija srednje plohe jednaka nula i da se poprečni presjek ne deformira u svojoj ravnini. Analitički model također opisuje linearno viskoelastično ponašanje vlaknima ojačanih plastičnih kompozitnih laminiranih greda. Razvijen je računalni program koji je verificiran na testnim primjerima.

Abstract

This work presents a finite element algorithm for buckling analysis of thin-walled laminated composite beam-type structures. One-dimensional finite element is employed under the assumptions of large displacements, but small strains. Stability analysis has been performed in an eigenvalue manner with non-linear displacement field of cross-section which includes the large rotation effects and in load-deflection manner using co-rotational formulation. The co-rotational description, used in this work, is linear on element level and all geometrically non-linear effects are introduced through the transformation from the local to the global coordinate system. The local coordinate system follows the element chord during the deformation and allows the use of simplified strain-displacement relations on the local element level. Classical lamination theory for thin fibre-reinforced laminates is employed in this work. The model is applicable to any arbitrary laminate stacking sequence, shape of the cross section and boundary conditions. The shear strain of middle surface is assumed to be zero and the cross-section is not distorted in its own plane. Analytical model also predict the linear viscoelastic behavior of thin-walled laminated fiber-reinforced plastic composite beams. Computer program has been developed and verified on test examples.

Predgovor

Na početku, htio bih izraziti zahvalnost svim ljudima koji su na bilo koji način doprinijeli realizaciji ove disertacije.

Prije svega, zahvaljujem se svojem mentoru, izv. prof. dr. sc. Domagoju Lancu, na upornosti, strpljenju, povjerenju i podršci koju mi je nesebično pružao tijekom pripreme i izrade ovog rada. Bezrezervno je podijelio svoje znanje, pružio stručno vodstvo i dao veliki doprinos u konačnom oblikovanju rada. Za svu pomoć, trud i vrijeme koje je u mene uložio, od srca mu upućujem zahvalu ne samo kao profesoru i mentoru, već i kao prijatelju.

Stručno i ljudsko ohrabrenje, poticaj i pomoć pružio mi je i prof. dr. sc. Goran Turkalj. Disertacija je nastala u sklopu rada na znanstvenoistraživačkom projektu Ministarstva znanosti Republike Hrvatske, *Konačnoelementni modeli za analizu stabilnosti grednih konstrukcija*, br. 069-0691736-1731, pod njegovim vodstvom. Ovim putem iskazujem mu svoju posebnu zahvalnost jer je svojim ogromnim iskustvom i znanjem pomogao da prepreke na koje sam naišao ne budu nepremostive.

Ugodna dužnost mi je uputiti riječi zahvale i prof. dr. sc. Josipu Brniću koji me je primio na svoj znanstveni projekt i omogućio međunarodni studijski boravak u Lisabonu. Hvala na ukazanom povjerenju i pruženoj prilici da postanem dio ovog zavoda.

Zahvalnost dugujem i svim ostalim kolegama sa Zavoda za tehničku mehaniku, a posebno Sanjinu, Edinu i Nevenu koji su svojim entuzijazmom i zalaganjem stvorili pozitivnu atmosferu i postali neodvojivi dio ovog istraživanja.

Hvala prof. dr. sc. Željanu Lozini za svoje vrijeme i strpljenje koje je kao član povjerenstva za ocjenu i obranu posvetio ovom radu.

Hvala mojim divnim roditeljima, što su uvijek imali strpljenja, snage, ljubavi i volje da me podrže u onome što sam naumio i što nikada nisu sumnjali u mene. Njima posvećujem ovaj rad.

Hvala Robiju, Ana-Mariji, svoj rodbini i prijateljima što su me razumjeli i "opravdali" sve izostanke.

I na kraju, mojoj Lani koja mi je dala snage i uvijek vjerovala u mene, veliko hvala za razumijevanje, podršku i ljubav.

Sadržaj

1. Uvod

1.1. Definiranje problema

Široka je mogućnost primjene kompozitnih grednih elemenata u različitim područjima tehnike, kao što su npr: strojogradnja, brodogradnja, graditeljstvo te avionska industrija. Ovo proizlazi iz razloga što su kompozitni gredni konstrukcijski elementi različitih tipova, a koji se javljaju i kao samostalne nosive konstrukcijske i kao dijelovi neke složenije konstrukcije (ukrepe pločastih i ljuskastih konstrukcija), zajednički za sva gore spomenuta područja. Uzimajući u obzir različite pristupe projektnim rješenjima te različite tehnološke mogućnosti proizvodnje, optimalno se projektno rješenje nameće kao primarni cilj. U analizi stabilnosti to znači da se ne stvara samo teorijski moguće dobro rješenje, već se ono stvara kao optimalno. U tu svrhu, rezultatom istraživanja manifestiranom u obliku numeričkog modela zasnovanom na metodi konačnih elemenata i pretočenom u kompjutorski program, tehničkoj bi se praksi pružio pouzdan i efikasan alat u fazi projektiranja i kontrole stabilnosti kompozitnih grednih konstrukcija. Pritom bi dani numerički algoritam pružao mogućnost analize stabilnosti kompozitnih grednih nosača različitih oblika poprečnog presjeka, različitih geometrija i tipova oslonaca, različitih načina spajanja grednih elemenata konstrukcije, kao i različitih oblika vanjskog opterećenja, a u smislu određivanja nivoa vanjskog opterećenja koje biva uzrokom pojave nestabilnosti deformacijske forme.

1.2. Pregled dosadašnjih znanstvenih istraživanja

Zahvaljujući svojim naglašenim svojstvima kao što su relativno visoka čvrstoća i krutost s obzirom na specifičnu težinu, a također i vrlo dobra otpornost koroziji, primjena je kompozitnih materijali u rapidnom porastu u različitim tehničkim područjima [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Stoga i ne čude mnoge istraživačke aktivnosti u smislu razvoja teorijskih i numeričkih metoda za analizu različitih tipova kompozitnih konstrukcijskih elemenata. Gredni su konstrukcijski elementi u današnje vrijeme široko primijenjeni u različitim područjima tehnike, kao što su npr: strojogradnja, brodogradnja, graditeljstvo te avionska industrija, a kompozitna gredna rješenja zbog svojih se spomenutih karakteristika često neizbježno nameću kao optimalna.

Značajnije aktivnosti razvoja analitičkih i numeričkih metoda za analizu kompozitnih greda datiraju od sredine 80-tih godina prošlog stoljeća kada Bauld i Tzeng [7] proširuju Vlasovu teoriju torzije s ograničenim vitoperenjem tankostjenih greda u smislu primjene na kompozitne materijale.

Sredinom 90-tih istraživanja mnogih autora usredotočena su na pokušaje matematičkog opisivanja stabilnosti tankostjenih kompozitnih grednih konstrukcija. Shearbourne i Kabir (1995) [8] u svojoj analizi uzimaju u obzir utjecaj smičnih sila pri lateralnom izvijanju tankostjenih kompozitnih grednih nosača I-profila poprečnog presjeka. Godoy et. al. (1995) [9] razvijaju matematički model izvijanja kompozitne grede I-profila s uključenom distorzijom poprečnog presjeka. Librescu, Song [10] i Bhaskar [11] (1992-1995) u svome modelu za analizu izvijanja kompozitnih greda uključuju sekundarno vitoperenje točaka izvan konture poprečnog presjeka.

Svakako je potrebno spomenuti jedan od prvih značajnijih konačnoelementnih modela za opis ove problematike. Wu i Sun (1990) [12] analiziraju izvijanje kompozitnih grednih nosača s uključenim smičnim efektima, no njihovim je modelom određivanje kritičnog opterećenja razmatrano samo na nivou problema vlastitih vrijednosti.

Kollar i Sapkas (2001) [13 i 14] analitičkim modelima simuliraju izvijanje stupova ortotropnih laminata različitih oblika poprečnih presjeka s različitim tipovima opterećenja i oslonaca. Leejev i Kimov (2001-2002) [15, 16 i 17] model simulira fleksijsko-torzijsko i lateralno izvijanje kompozitnih greda I i U profila poprečnih presjeka.

Massa i Barbero (1998) [18], Pollock et. al. (1995) [19] kao i Omidvar (1996) [20] razmatraju savijanje kompozitnih greda pod utjecajem smičnih sila međutim bez uključenog utjecaja neuniformnog vitoperenja. Taj efekt inače od velike važnosti pri određivanju kritičnih opterećenja izvijanja grednih nosača u svome modelu uzimaju u obzir Cortinez et. al. (1998, 2002) [21, 22].

Od iznimnog su značaja i radovi Camotima, Silvestrea i Silve (2004-2007) [23, 24] koji razvijaju GBT-*Generalized Beam Theory* kojom pokrivaju domenu izvijanja greda otvorenih tankostjenih poprečnih presjeka od ortotropnih laminatnih materijala ali zasada samo na razini linearne analize izvijanja u smislu određivanja kritičnog opterećenja kao vlastite vrijednosti.

Kompozitne konstrukcije su podložne progresivnim deformacijama uzrokovanim efektima puzanja ponajviše radi viskoelastičnog svojstva matrice kompozitnog materijala. Zbog toga je od velike važnosti poznavanje viskoelastičnog ponašanja i njegovo implementiranje u analizi konstrukcija. Stoga, Barbero i Luciano (1995) [25] razvijaju mikromehanički model za opis linearno viskoelastičnih tijela s periodičkom mikrostrukturom. Izveli su analitičke izraze u Laplaceovoj domeni za tenzor relaksacije matrice kompozitnog materijala koja se opisuje Maxwell-Voightovim modelom (Mase, 1977) [26] s dva parametra. U radovima Barbera i Luciana (1995) [25], Harrisa i Barbera (1998) [27] i Qiaoa et al. (2000) [28] pokazana je dobra podudarnost rezultata s eksperimentalnim mjerenjima.

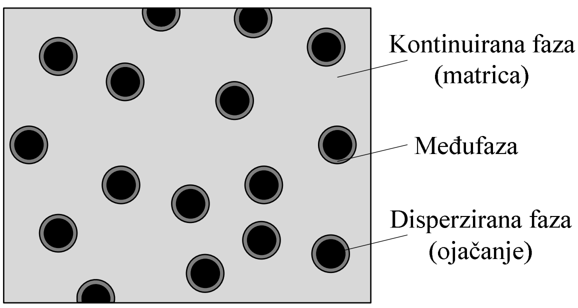
Oliveira i Creus (2003) [29] razvili su model za analizu viskoelastičnih pravocrtnih tankostjenih greda koristeći nelinearni pristup i shell konačne elemente. Piovan i Cortinez (2008) [30] razmatraju linearno viskoelastično ponašanje tankostjenih pravocrtnih i zakrivljenih kompozitnih greda s polimernom matricom.

1.3. Svrha i cilj istraživanja

Svrha je istraživanja u ovom radu izrada numeričkog algoritma temeljenog na metodi konačnih elemenata, a koji u formi programa za elektroničko računalo postaje samostalna cjelina dostatna za analizu nelinearnog odziva kompozitnih grednih konstrukcija u režimu velikih pomaka. Numerički algoritam obuhvaća materijalnu nelinearnost kao i geometrijsku nelinearnosti u smislu uključivanja velikih pomaka i velikih rotacija konstrukcijskih elemenata u svrhu čega je korištena inkrementalna formulacija. Istraživanje za cilj ima tehničkoj praksi ponuđenim numeričkim algoritmom pružiti pouzdan alat u svrhu potpune analize spomenutih konstrukcija u fazi njihova projektiranja i eksploatacije poglavito u smislu upozorenja na gubitak nosivosti konstrukcije prouzročenu gubitkom stabilnosti.

2. Mehanika kompozita

Kompozitni materijali su idealni za primjenu kod konstrukcija koje zahtijevaju veliku čvrstoću ili krutost uz malu masu, otpornost na koroziju, dugotrajnost, dobra akustička i termalna svojstva itd. Kompozit je materijal koji se sastoji od dvije ili više faza koji je sačinjen tako da su mehaničke značajke cjeline bolje od značajki pojedinačnih faza [31]. Disperzirana, kruća i čvršća faza naziva se ojačanje, a kontinuirana, podatljivija i slabija faza naziva se matrica. Zbog kemijskih interakcija ili drugih proizvodnih efekta, može se pojaviti i međufaza između ojačanja i matrice (sl. 2.1.).



sl. 2.1. *Faze kompozitnog materijala*

Značajke kompozita ovise o značajkama faza, njihovoj raspodjeli i volumnom udjelu ojačanja. Raspodjela, geometrija i orijentacija ojačanja utječu na heterogenost i anizotropiju kompozitnog materijala. Faze kompozita imaju različitu ulogu koja ovisi od namjene samog materijala. Kod konstrukcija sa nižim zahtjevima s obzirom na čvrstoću, disperzirana faza manje utječe na čvrstoću i krutost dok matrica preuzima opterećenje. Pri većim zahtjevima s obzirom na čvrstoću, ojačanje predstavlja "kralježnicu" sustava i određuje čvrstoću i krutost konstrukcije, a matrica podupire i spaja disperziranu fazu te prenosi lokalna naprezanja s jednog vlakna na drugo.

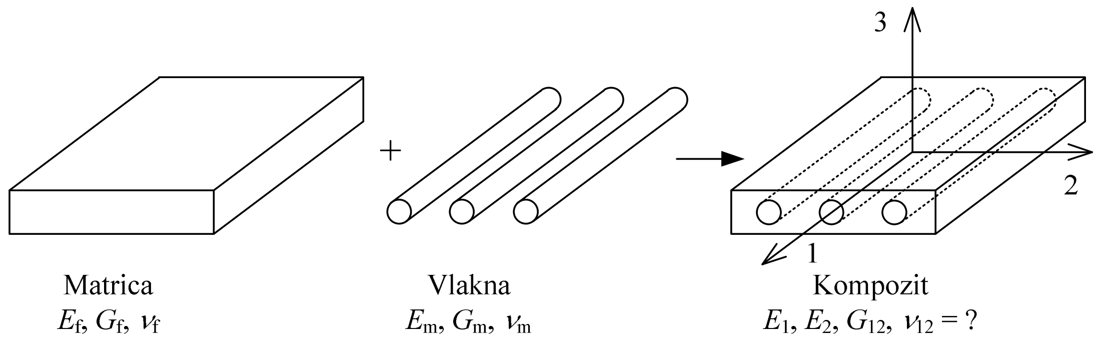
S obzirom na vrstu ojačanja, kompoziti se mogu podijeliti na kompozite pojačane česticama i kompozite pojačane vlaknima koji se dalje dijele na jednoslojne i višeslojne kompozite. Jednoslojni kompoziti mogu imati neprekidna jednosmjerna ili dvosmjerna vlakna te isprekidana vlakna sa nasumičnom ili ciljanom orijentacijom. Višeslojni kompoziti se dijele na laminate i "sendvič" panele. Ovaj rad se bavi gredama laminatnog poprečnog presjeka.

Matrice su uglavnom metalne, keramičke ili polimerne, a materijali vlakana su: staklo, bor, ugljik, aluminij, silicij, volfram, berilij, polietilen, aramid itd.

2.1. Mikromehanika kompozita

Osnovna zadaća mikromehanike je odrediti vezu mehaničkih svojstva kompozita i mehaničkih svojstava vlakana, odnosno matrice (sl. 2.2.). Pri tome se polazi od osnovnih pretpostavki:

- vlakna i matrica su idealno povezane tj. deformacije vlakana i matrice su jednaka
- nema šupljina u kompozitu
- lokalni efekti (npr. koncentracija naprezanja) nisu uzeti u obzir
- matrica i vlakna su izotropni

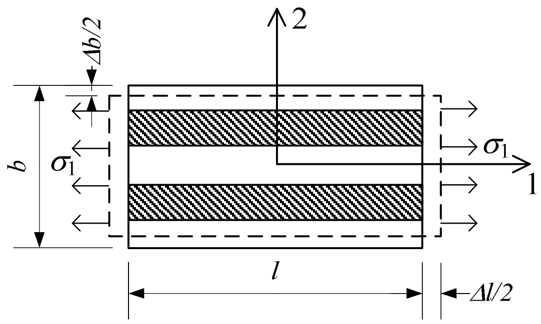


sl. 2.2. *Osnovna zadaća mikromehanike*

2.1.1. Uzdužno opterećenje

Uzdužna os 1 poklapa se sa smjerom vlakana. Sa sl. 2.3. može se vidjeti da je:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}. \tag{2.1}$$



sl. 2.3. *Uzdužno opterećenje elementarnog volumena*

Za kompozite s paralelnim vlaknima, volumni udjeli vlakana i matrice mogu se izraziti preko površine poprečnog presjeka:

$$V_f = \frac{A_f}{A}, \quad V_m = \frac{A_m}{A}, \tag{2.2}$$

pri čemu A_f i A_m označavaju površine poprečnog presjeka vlakana, odnosno matrice, a A predstavlja ukupnu površinu poprečnog presjeka. Budući da nema šupljina u kompozitu, vrijedi:

$$V_f + V_m = 1. \tag{2.3}$$

Iz pretpostavke da je veza vlakana i matrice idealna slijedi da su deformacije vlakana i matrice jednake;

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1. \tag{2.4}$$

Za vlakna i matricu vrijedi Hookeov zakon pa naprezanja iznose:

$$\sigma_f = E_f \cdot \varepsilon_f, \tag{2.5}$$

$$\sigma_m = E_m \cdot \varepsilon_m. \tag{2.6}$$

Naprezanje vlakna σ_f djeluje na površinu poprečnog presjeka vlakna, A_f, naprezanje matrice σ_m djeluje na površinu poprečnog presjeka matrice A_m, a prosječno naprezanje σ_1 djeluje na ukupnu površinu A, tako da rezultantna sila F iznosi:

$$F = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \,. \tag{2.7}$$

Uvrštavanjem izraza (2.4)-(2.6) u prethodni izraz te uz jednakost

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_1 \tag{2.8}$$

dobiva se:

$$E_1 = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A} \,. \tag{2.9}$$

Uvrštavanjem izraza za volumne udjele vlakana i matrice (2.2) u prethodni izraz dobiva se izraz za uzdužni modul elastičnosti:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \tag{2.10}$$

koji predstavlja zakon miješanja kompozita (eng. *rule of mixtures*).

Za slučaj kada je ukupno naprezanje jednako σ_1, Poissonov koeficijent za ravninu 1-2 iznosi:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \,, \tag{2.11}$$

Poprečne deformacije vlakana i matrice iznose:

$$\Delta b_f = b \cdot V_f \cdot \nu_f \cdot \varepsilon_{1f} \,, \tag{2.12}$$

$$\Delta b_m = b \cdot V_m \cdot \nu_m \cdot \varepsilon_{1m} \,. \tag{2.13}$$

Uz pretpostavku da su deformacije u smjeru 1 vlakana i matrice jednake, onda za poprečnu deformaciju vrijedi:

$$\Delta b = -b \cdot \varepsilon_2 = b \cdot \nu_{12} \cdot \varepsilon_1 \,, \tag{2.14}$$

a iz sl. 2.3. proizlazi:

$$\Delta b = \Delta b_f + \Delta b_m \,. \tag{2.15}$$

Kombiniranjem izraza (2.11)-(2.15) slijedi:

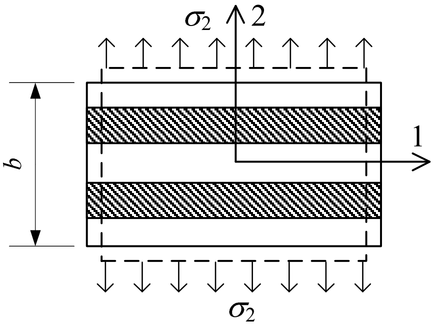
$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \,, \tag{2.16}$$

što predstavlja zakon miješanja za Poissonov koeficijent ν_{12}.

2.1.2. Poprečno opterećenje

Za jednosmjerne vlaknaste kompozite može se pretpostaviti da su jednaka naprezanja matrice i vlakana u smjeru osi 2 (sl. 2.4.). Tada se poprečne deformacije mogu izraziti preko naprezanja:

$$\varepsilon_{2f} = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_{2m} = \frac{\sigma_2}{E_m}. \tag{2.17}$$



sl. 2.4. *Poprečno opterećenje elementarnog volumena*

Ukupno produljenje je zbroj produljenja vlakana i matrice pa vrijedi:

$$\Delta b = \varepsilon_2 b = V_f b \varepsilon_{2f} + V_m b \varepsilon_{2m}, \tag{2.18}$$

odnosno:

$$\varepsilon_2 = V_f \varepsilon_{2f} + V_m \varepsilon_{2m}, \tag{2.19}$$

što uvrštenjem izraza (2.17) postaje:

$$\varepsilon_2 = V_f \frac{\sigma_2}{E_f} + V_m \frac{\sigma_2}{E_m}. \tag{2.20}$$

Budući da naprezanje u smjeru osi 2 iznosi:

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2, \tag{2.21}$$

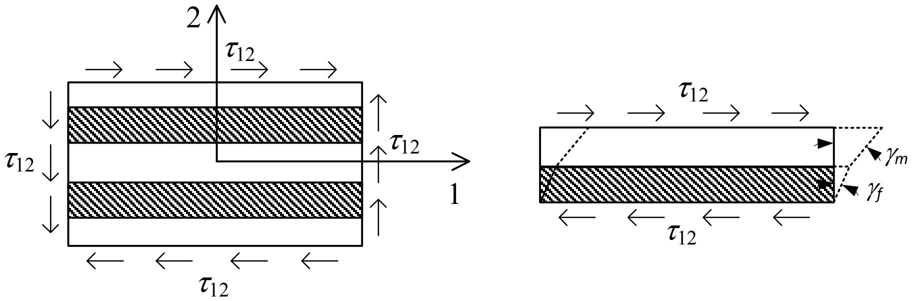
kombiniranjem izraza (2.20) i (2.21) dobiva se izraz za poprečni modul elastičnosti:

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m}. \tag{2.22}$$

2.1.3. Smično opterećenje

Promatran je jedan sloj koji je smično opterećen u ravnini 1-2 (sl. 2.5.). Kutna deformacija vlakna i matrice iznosi:

$$\gamma_f = \frac{\tau_{12}}{G_f}, \quad \gamma_m = \frac{\tau_{12}}{G_m}. \tag{2.23}$$



sl. 2.5. *Smično opterećenje elementarnog volumena*

Na osnovu trigonometrije može se dokazati da je:

$$\gamma_{12} = \gamma_f V_f + \gamma_m V_m. \tag{2.24}$$

Kutna deformacija sloja iznosi:

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}. \tag{2.25}$$

Pod pretpostavkom da je tangencijalno naprezanje jednoliko raspoređeno, kombiniranjem izraza (2.23)-(2.25) dobiva se:

$$\frac{\tau_{12}}{G_{12}} = \frac{\tau_{12}}{G_f} V_f + \frac{\tau_{12}}{G_m} V_m \tag{2.26}$$

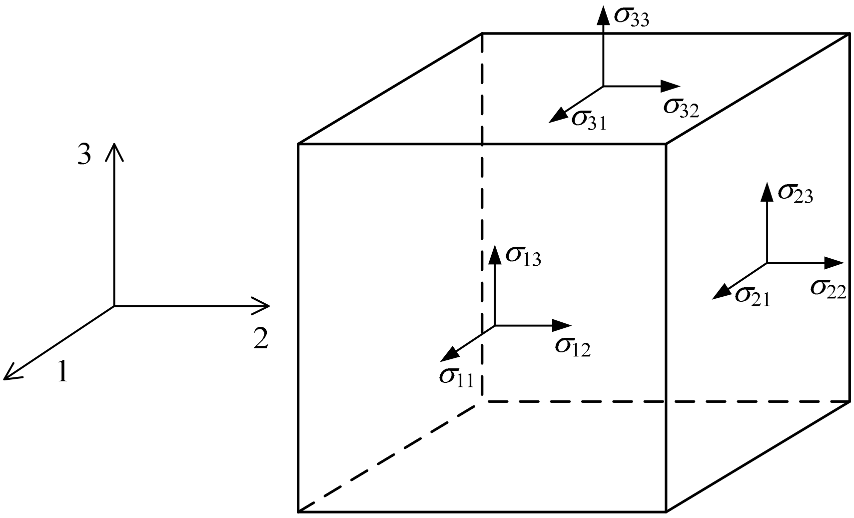
pa modul smicanja u ravnini 1-2 iznosi:

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m + V_m G_f} \tag{2.27}$$

Modul elastičnosti vlakna je puno veći od modula elastičnosti matrice. S obzirom na tu činjenicu iz mikromehaničkih izraza može se zaključiti da modul elastičnosti vlakna značajno utječe na uzdužni modul elastičnosti kompozita, a modul elastičnosti matrice ima veliki utjecaj na poprečni modul elastičnosti i modul smicanja u ravnini 1-2 kompozita.

2.2. Makromehanika jednoslojnih kompozita

Osnovna zadaća makromekanike jednoslojnih kompozita je opisati kako se jedan sloj ponaša pri određenom opterećenju. Na sl. 2.6.prikazano je troosno stanje naprezanja elementarnog volumena.



sl. 2.6. *Stanje naprezanja elementarnog volumena*

Tenzori naprezanja i deformacije se mogu zapisati u obliku jednostupčastih matrica:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{31} & \sigma_{12} & \sigma_{32} & \sigma_{13} & \sigma_{21} \end{bmatrix}^T \tag{2.28}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{31} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{21} \end{bmatrix}^T \tag{2.29}$$

Veza između komponenata Cauchyjevog tenzora naprezanja i tenzora deformacija može se izraziti tenzorom podatljivosti S_{ijkl} ili tenzorom elastičnosti C_{ijkl} [32]. Budući da su naprezanja i deformacije tenzori drugog reda, a tenzori podatljivosti i elastičnosti tenzori četvrtog reda, veza tenzora deformacija i naprezanja u indeksnom zapisu glasi:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}\,, \tag{2.30}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,, \tag{2.31}$$

za i, j, k, l = 1, 2, 3.

2.2.1. Anizotropni materijali

Anizotropni materijali je onaj materijal kojemu su fizičko-mehanička svojstva u različitim smjerovima različita. Stanje deformacije anizotropnog tijela u općem slučaju može se izraziti kao:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{32}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} & S_{1132} & S_{1113} & S_{1121}\\
S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} & S_{2232} & S_{2213} & S_{2221}\\
S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} & S_{3332} & S_{3313} & S_{3321}\\
S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} & S_{2332} & S_{2313} & S_{2321}\\
S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3123} & S_{3131} & S_{3112} & S_{3132} & S_{3113} & S_{3121}\\
S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1231} & S_{1212} & S_{1232} & S_{1213} & S_{1221}\\
S_{3211} & S_{3222} & S_{3233} & S_{3223} & S_{3231} & S_{3212} & S_{3232} & S_{3213} & S_{3221}\\
S_{1311} & S_{1322} & S_{1333} & S_{1323} & S_{1331} & S_{1312} & S_{1332} & S_{1313} & S_{1321}\\
S_{2111} & S_{2122} & S_{2133} & S_{2123} & S_{2131} & S_{2112} & S_{2132} & S_{2113} & S_{2121}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{32}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{21}\end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

a stanje naprezanja kao:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{32}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{21}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121}\\
C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221}\\
C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321}\\
C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321}\\
C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121}\\
C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221}\\
C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221}\\
C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321}\\
C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{32}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21}\end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Tenzori podatljivosti i elastičnosti, kao tenzori četvrtog reda, su kvadratne matrice dimenzija 9x9. Budući da su kutne deformacije i tangencijalna naprezanja konjugirana, tj. $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}$, $\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}$ i $\sigma_{12}=\sigma_{21}$, $\sigma_{23}=\sigma_{32}$, $\sigma_{13}=\sigma_{31}$, moguće je matrice S_{ijkl} i C_{ijkl} svesti na oblik 6x6. Time se broj materijalnih konstanti smanjuje sa 81 na 36, a zbog simetrije samog tenzora elastičnosti, odnosno podatljivosti, broj konstanti se smanjuje na konačnih 21, što je i maksimalni broj materijalnih konstanti koje opisuju ponašanje elastičnog materijala. S obzirom na navedeno izrazi za tenzore deformacija i naprezanja anizotropnog materijala mogu se pisati kao:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & \mathrm{SIM} & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}, \tag{2.34}$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \mathrm{SIM} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Simetrija tenzora elastičnosti može se dokazati na sljedeći način. Rad po jedinici volumena iznosi:

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j . \tag{2.36}$$

Deriviranjem prethodnog izraza (2.36) po ε_i dobiva se:

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \varepsilon_j \tag{2.37}$$

te još jednim deriviranjem po ε_j dobiva se:

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} . \tag{2.38}$$

Isto vrijedi i za obrnuti redoslijed deriviranja:

$$C_{ji} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} , \tag{2.39}$$

pa se može zaključiti da je:

$$C_{ij} = C_{ji} , \tag{2.40}$$

i analogno:

$$S_{ij} = S_{ji} , \tag{2.41}$$

2.2.2. Ortotropni materijali

Ortotropnih materijali su oni materijali koji imaju tri međusobno okomite ravnine simetrije. Broj materijalnih konstanti, u tom slučaju, reducira se na devet pa izrazi za tenzore deformacija i naprezanja poprimaju sljedeći oblik:

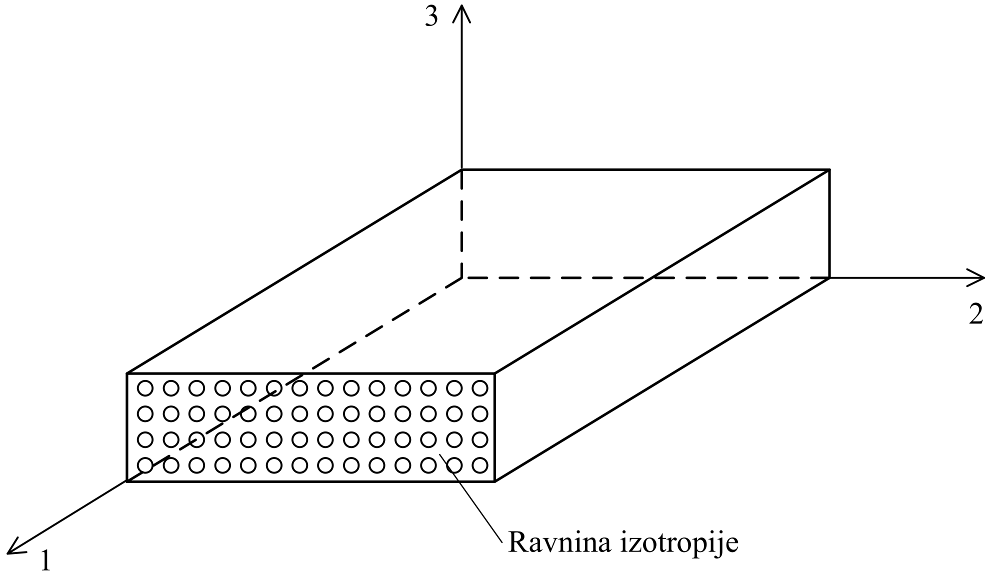
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}, \tag{2.42}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}. \tag{2.43}$$

Iz tenzora podatljivosti i elastičnosti može se primijetiti da nema interakcije između normalnih naprezanja σ1, σ2, σ3 i posmičnih deformacija γ4, γ5, γ6, što znači da normalna naprezanja uzrokuju samo normalne deformacije. Isto tako nema interakcije između posmičnih naprezanja τ_4, τ_5, τ_6 i normalnih deformacija ε_1, ε_2, ε_3, što znači da posmična naprezanja uzrokuju samo kutne deformacije. Ne postoji ni interakcija između posmičnih naprezanja koja djeluju u jednoj ravnini i kutnih deformacija u drugoj ravnini, tako da posmična naprezanja uzrokuju samo kutne deformacije u ravnini u kojoj djeluju.

2.2.3. Transverzalno izotropni materijali

Materijal je transverzalno izotropan kada kroz svaku točku materijala prolazi ravnina u kojoj su fizičko-mehanička svojstva u svim smjerovima jednaka, tj kada je jedna od glavnih ravnina ujedno i ravnina izotropije (sl. 2.7.).



sl. 2.7. *Transverzalno izotropan materijal*

U slučaju da je ravnina 2-3 ravnina izotropije kao na sl. 2.7., tada vrijedi:

$$C_{12} = C_{13}\,,\; C_{22} = C_{33}\,, C_{55} = C_{66}\,, \tag{2.44}$$

odnosno:

$$S_{12} = S_{13}\,,\; S_{22} = S_{33}\,, S_{55} = S_{66} \tag{2.45}$$

pa izrazi za tenzore deformacija i naprezanja poprimaju sljedeći oblik:

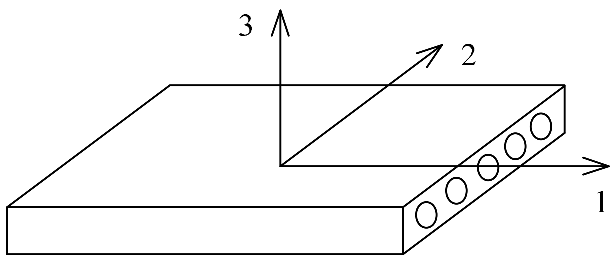
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\left(S_{22} - S_{23}\right) & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & & S_{66} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}, \tag{2.46}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \left(C_{22} - C_{23}\right)/2 & 0 & 0 \\ & \text{SIM} & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

Tenzori podatljivosti i elastičnosti trasverzalno izotropnih materijala imaju pet materijalnih konstanti. Kada materijal ima beskonačno mnogo ravnina u kojoj su fizičko-mehanička svojstva u svim smjerovima jednaka, radi se o izotropnom materijalu koji se može opisati samo sa dvije materijalne konstante.

2.2.4. Ravninsko stanje naprezanja

Pretpostavka ravninskog stanja naprezanja česta je kod analize vlaknima ojačanih kompozitnih materijala [33]. To je zato jer se vlaknasti kompoziti uglavnom koriste za gredne, pločaste, cilindrične ili druge konstrukcijske oblike gdje je jedna geometrijska dimenzija manja od druge dvije.



sl. 2.8. *Elementarni volumen u ravninskom stanju naprezanja*

Ako sloj kompozitnog materijala leži u ravnini 1-2 (sl. 2.8.) tada se može pretpostaviti da je:

$$\sigma_3 = 0\,,\ \tau_{23} = 0\,, \tau_{13} = 0 \tag{2.48}$$

pa se reduciranjem izraza (2.46) dobiva:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \tag{2.49}$$

Na sl. 2.8. desno orijentirani koordinatni sustav odabran je tako da se os "1" poklapa sa smjerom vlakana, os "2" je okomita na os "1" i leži u ravnini sloja dok je os "3" okomita na ravninu sloja.

Matrica oblika 3x3 u izrazu (2.49) naziva se reducirani tenzor podatljivosti. Komponente tenzora podatljivosti S_{ij} izražene preko inženjerskih konstanti glase:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \tag{2.50}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}, \tag{2.51}$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \tag{2.52}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \tag{2.53}$$

Inverzni tenzor od reduciranog tenzora podatljivosti je reducirani tenzor elastičnosti koji je dan u sljedećem izrazu:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \tag{2.54}$$

gdje su komponente tenzora elastičnosti Q_{ij}:

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}{}^2}, \tag{2.55}$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}{}^2}, \tag{2.56}$$

$$Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}{}^2}, \tag{2.57}$$

$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} \tag{2.58}$$

ili izražene preko inženjerskih konstanti:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \tag{2.59}$$

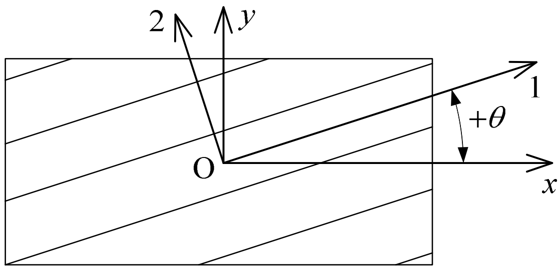
$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \tag{2.60}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \tag{2.61}$$

$$Q_{66} = G_{12}. \tag{2.62}$$

2.2.5. Naprezanja i deformacije proizvoljno orijentiranog sloja

Na sl. 2.9. prikazan je elementarni volumen sa glavnim osima 1 i 2. Potrebno je izvesti transformaciju iz koordinatnog sustava glavnih osi materijala (1-2) u globalni koordinatni sustav(x-y). Vlakna su pod kutom θ u odnosu na pozitivni smjer osi x. Pozitivan smjer kuta θ odabran je u smjeru suprotnom od rotacije kazaljke na satu.



sl. 2.9. *Elementarni volumen u lokalnom i globalnom koordinatnom sustavu*

Za ravninsko stanje naprezanja transformacijske jednadžbe kojim se izražavaju naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu preko naprezanja u koordinatnom sustavu glavnih osi materijala glase:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.63)$$

Uobičajeno je da se prethodni izraz (2.63) pojednostavljeno piše kao:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.64)$$

gdje je [T] transformacijska matrica:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Inverzna transformacijska matrica $[T]^{-1}$ ima sljedeći oblik:

$$[T]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{2.66}$$

i koristi se u izrazu:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=[T]^{-1}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}. \tag{2.67}$$

Analogno, transformacijski izrazi za deformaciju mogu se napisati kao:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \frac{1}{2}\gamma_{12}\end{Bmatrix}=[T]\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\end{Bmatrix}, \tag{2.68}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[T]^{-1}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \frac{1}{2}\gamma_{12}\end{Bmatrix}. \tag{2.69}$$

Radi činjenice da se u izrazima (2.68) i (2.69) kutna deformacija pojavljuje u polovičnom iznosu u izraze za transformaciju uvodi se matrica [R]:

$$[R]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \tag{2.70}$$

pa se tenzori deformacije mogu zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}=[R]\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \frac{1}{2}\gamma_{12}\end{Bmatrix},\qquad \begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \frac{1}{2}\gamma_{12}\end{Bmatrix}=[R]^{-1}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}, \tag{2.71}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[R]\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\end{Bmatrix},\qquad \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[R]^{-1}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}. \tag{2.72}$$

Reducirani tenzor elastičnosti (2.54) može se zapisati kao:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.73}$$

pa se uvrštavanjem izraza (2.73), (2.71) i (2.69) u izraz (2.67) dobiva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{2.74}$$

Može se pokazati da je $[R][T][R]^{-1} = [T]^{-T}$ pa uvođenjem izraza za transformirani reducirani tenzor elastičnosti:

$$\left[\bar{Q}\right] = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} [T]^{-T} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}, \tag{2.75}$$

veza tenzora naprezanja i deformacije poprima oblik:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2.76}$$

gdje su komponente transformiranog reduciranog tenzora elastičnosti:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)^2 \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta\right) \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta
\end{aligned}, \tag{2.77}$$

Analogno gore prikazanoj proceduri, može se tenzor deformacije izraziti preko tenzora naprezanja:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{13} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2.78}$$

gdje su komponente transformiranog reduciranog tenzora podatljivosti:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{11} &= S_{11}\cos^4\theta + 2(S_{12}+2S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{22}\sin^4\theta \\
\overline{S}_{22} &= S_{11}\sin^4\theta + 2(S_{12}+2S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{22}\cos^4\theta \\
\overline{S}_{16} &= (2S_{11}-2S_{12}-S_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (2S_{12}-2S_{22}+S_{66})\cos\theta\sin^3\theta \\
\overline{S}_{66} &= 2(2S_{11}+S_{22}-4S_{12}-S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{66}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right) \\
\overline{S}_{12} &= (S_{11}+S_{22}-S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{12}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right) \\
\overline{S}_{26} &= (2S_{11}-2S_{12}-S_{66})\cos\theta\sin^3\theta + (2S_{12}-2S_{22}+S_{66})\sin\theta\cos^3\theta
\end{aligned}, \tag{2.79}$$

Ako se pretpostavi da je $\sigma_y = 0$, izraz (2.76) se dodatno reducira u sljedeći oblik:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{Q}_{11}^* & \overline{Q}_{16}^*\\ \overline{Q}_{16}^* & \overline{Q}_{66}^*\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}, \tag{2.80}$$

gdje je:

$$\overline{Q}_{11}^* = \overline{Q}_{11} - \frac{\overline{Q}_{12}^{\,2}}{\overline{Q}_{22}}, \tag{2.81}$$

$$\overline{Q}_{16}^* = \overline{Q}_{16} - \frac{\overline{Q}_{12}\overline{Q}_{16}}{\overline{Q}_{22}}, \tag{2.82}$$

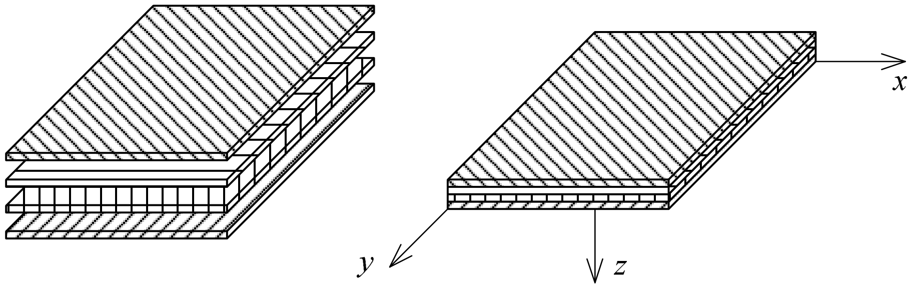
$$\overline{Q}_{66}^* = \overline{Q}_{11} - \frac{\overline{Q}_{26}^{\,2}}{\overline{Q}_{22}}. \tag{2.83}$$

2.3. Makromehanika višeslojnih kompozita

Vlaknom ojačani materijali se najčešće sastoje od više slojeva koji tvore laminat (sl. 2.10.). Pri tome je svaki sloj tanak i može imati različitu orijentaciju vlakana. Dva laminata mogu biti različita iako imaju jednaki broj slojeva sa jednakom orijentacijom pod uvjetom da imaju različit raspored slaganja. Osnovna zadaća makromekanike višeslojnih kompozita je opisati kako se višeslojni kompozit ponaša pri određenom opterećenju. Pri tome je korištena klasična teorija laminata uz sljedeće pretpostavke:

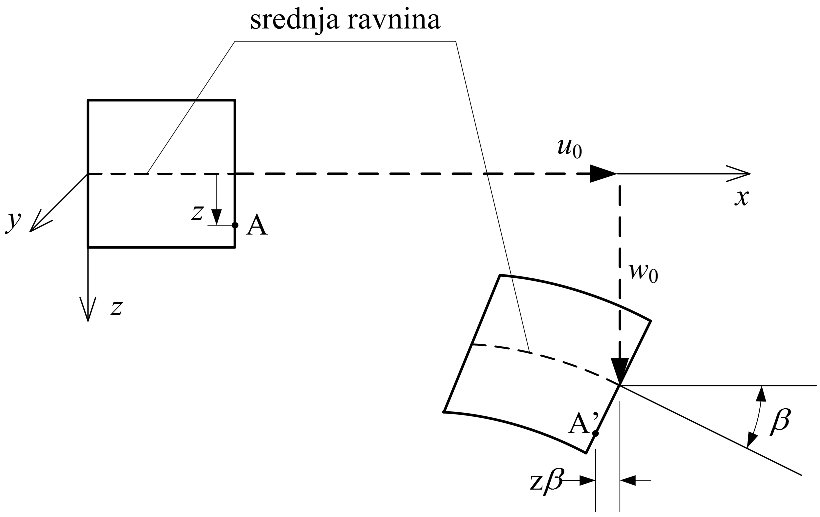
- laminat je tanka ploča u stanju ravninskog naprezanja
- spajanje slojeva je „idealno“, odnosno debljina spoja (ljepila) je jednaka 0 i nema proklizavanja

- zadržan je kontinuitet pomaka s obzirom na spoj
- pri deformiranju normala na srednju ravninu laminata ostaje okomita (γ_{xz}, γ_{yz} = 0)



sl. 2.10. *Laminat*

Na sl. 2.11. prikazana je kinematika deformacije laminata u ravnini *x-z*. Iz slike se vide pomaci točke A koja je smještena na proizvoljnoj udaljenosti z od srednje ravnine.



sl. 2.11. *Kinematika deformacije laminata*

u_0, v_0 i w_0 označavaju translacijske pomake točke srednje ravnine laminata u smjeru *x*, *y* i *z* osi. Pomak točke A u smjeru *x* osi je:

$$u = u_o - z\beta \,. \tag{2.84}$$

Prema pretpostavci da normala ostaje okomita na poprečni presjek, β predstavlja nagib srednje ravnine laminata na *x* os pa vrijedi:

$$\beta = \frac{\partial w_o}{\partial x}. \tag{2.85}$$

Izraz (2.86) tada glasi:

$$u = u_o - z\frac{\partial w_o}{\partial x}. \tag{2.86}$$

Analogno za savijanje u ravnini (*z*, *y*) vrijedi:

$$v = v_o - z\frac{\partial w_o}{\partial y}. \tag{2.87}$$

Za male deformacije vrijede izrazi:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2}, \tag{2.88}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2}, \tag{2.89}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y}, \tag{2.90}$$

odnosno u matričnom zapisu:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2.91}$$

gdje su ε_{ij}^0 komponente deformacije srednje ravnine laminata:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_o}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_o}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_o}{\partial y} + \dfrac{\partial v_o}{\partial x} \end{Bmatrix}, \tag{2.92}$$

a κ_{ij} su komponente zakrivljenosti srednje ravnine laminata:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \tag{2.93}$$

Uvrštenjem izraza (2.91) u izraz (2.76), konstitutivna jednadžba k-tog sloja laminata, izražena preko deformacija i zakrivljenosti srednje ravnine laminata, poprima oblik:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{2.94}$$

Rezultante unutrašnjih sila laminata prikazanih na sl. 2.12. mogu se dobiti integracijom naprezanja u svakom sloju:

$$N_\mathrm{x} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\mathrm{x} \, \mathrm{dz} \,, \tag{2.95}$$

$$N_\mathrm{y} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\mathrm{y} \, \mathrm{dz} \,, \tag{2.96}$$

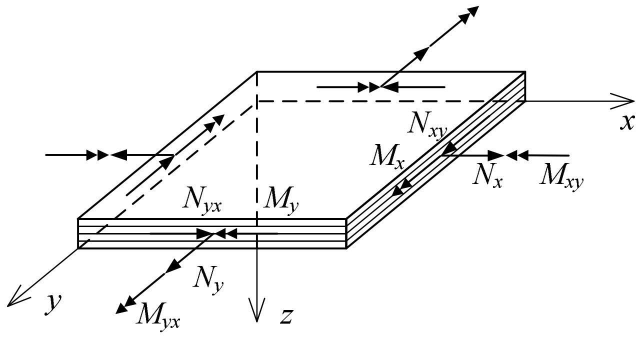
$$N_\mathrm{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_\mathrm{xy} \, \mathrm{dz} \,, \tag{2.97}$$

$$M_\mathrm{x} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\mathrm{x} \, \mathrm{z} \, \mathrm{dz} \,, \tag{2.98}$$

$$M_\mathrm{y} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\mathrm{y} \, \mathrm{z} \, \mathrm{dz} \,, \tag{2.99}$$

$$M_\mathrm{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_\mathrm{xy} \, \mathrm{z} \, \mathrm{dz} \,, \tag{2.100}$$

gdje h označava ukupnu debljinu laminata.

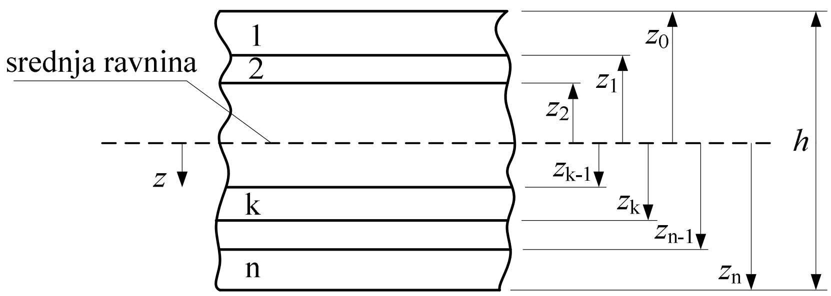


sl. 2.12. *Rezultante unutrašnjih sila laminata*

Na sl. 2.13. prikazan je poprečni presjek laminata sastavljenog od n slojeva ukupne debljine h. Granice prvog sloja su određene vrijednostima z_0 i z_1, drugog sloja vrijednostima z_1 i z_2, k-tog sloja vrijednostima z_{k-1} i z_k, a n-tog sloja vrijednostima z_{n-1} i z_n. Rezultante unutrašnjih sila laminata iz izraza(2.95)-(2.100) mogu se matrično izraziti kao suma n integrala naprezanja:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \mathrm{dz} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k \mathrm{dz}\,, \tag{2.101}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \mathrm{zdz} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k \mathrm{zdz}\,. \tag{2.102}$$



sl. 2.13. *Poprečni presjek laminata*

Uvrsti li se izraz (2.94) u izraze (2.101) i (2.101) pretpostavi li se da su komponente transformiranog reduciranog tenzora elastičnosti $\bar{Q}_{ij}$ konstantne kroz cijeli sloj, dobiva se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \mathrm{d}z + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z\,\mathrm{d}z \right], \tag{2.103}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z\,\mathrm{d}z + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2\,\mathrm{d}z \right]. \tag{2.104}$$

Budući da vrijednosti $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ nisu funkcije od z, mogu se izlučiti iz izraza pod integralom pa jednadžbe (2.103) i (2.104) poprimaju opći oblik:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \tag{2.105}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{2.106}$$

gdje je A_{ij} aksijalna krutost (eng. *extensional stiffness*):

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(n_k - n_{k-1}\right), \tag{2.107}$$

B_{ij} spregnuta krutost (eng. *bending-extension coupling stiffness*):

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(n_k^{\,2} - n_{k-1}^{\,2}\right), \tag{2.108}$$

D_{ij} savojna krutost (eng. *bending stiffness*):

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{i} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(n_k^{\,3} - n_{k-1}^{\,3}\right). \tag{2.109}$$

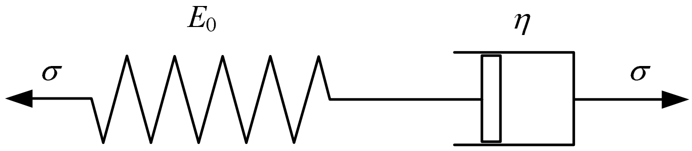
Izrazi (2.105) i (2.106) mogu se zapisati skraćeno:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ \kappa \end{Bmatrix}. \tag{2.110}$$

2.4. Puzanje kompozita

Puzanje se može definirati kao pojava da se tijekom vremena povećavaju deformacije pri konstantnom opterećenju ili konstantnom naprezanju. Dakle, kod opisivanja puzanja uvodi se faktor vremena pri opisivanju veze između naprezanja i deformacije. Pri izradi laminatnih konstrukcija namjenjenih dugotrajnoj eksploataciji, stoga, treba voditi računa o puzanju materijala. Barbero i Luciano [25] su pri ispitivanju viskoelastičnog ponašanja polimernih kompozitnih materijala ustanovili da na puzanje polimernih kompozita utječu isključivo viskoelastična svojstva matrice jer efekti puzanja nemaju mjerljiv utjecaj na vlakna.

U svrhu lakšeg opisivanja krivulja *naprezanje-vrijeme* i *deformacija-vrijeme*, često se ponašanje materijala pri puzanju prikazuju reološkim modelima. Na sl. 2.14. prikazan je Maxwellov model koji se sastoji od serijskog spoja opruge i prigušivača.



sl. 2.14. *Maxwellov model*

Brzina deformacije Maxwellov modela iznosi:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0} + \frac{\sigma(t)}{\eta}, \tag{2.111}$$

gdje je E_0 modul elastičnosti u za $t = 0$, a η je parametar viskoznosti. Integriranjem izraza (2.111) po vremenu dobiva se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{1}{\eta}\int_0^t \sigma dt\,. \tag{2.112}$$

Budući da je naprezanje konstantno dobiva se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma t}{\eta}. \tag{2.113}$$

Izraz (2.113) može se još napisati kao:

$$\varepsilon(t) = Q^{-1}(t)\sigma\,. \tag{2.114}$$

ili obrnuto:

$$\sigma(t) = Q(t)\varepsilon \,. \tag{2.115}$$

gdje *Q(t)* i $Q^{-1}(t)$ predstavljaju linearne diferencijalne operatore relaksacije i puzanja. Za Maxwellov model vrijedi:

$$Q^{-1}(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta}. \tag{2.116}$$

Za Voigt–Kelvinov model koji se sastoji opruge i prigušivača u paralelnom spoju (sl. 2.15.) vrijedi:

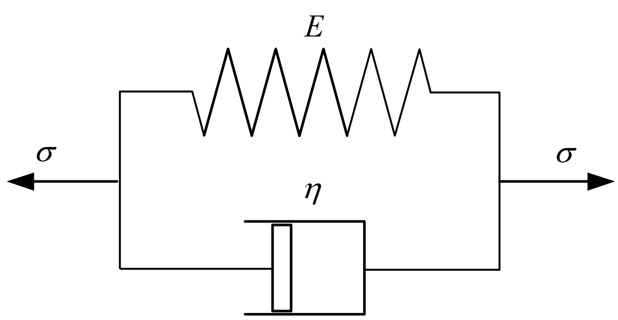
$$\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t) + E\varepsilon(t) \tag{2.117}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (2.117) glasi:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-\frac{tE}{\eta}}\right) \tag{2.118}$$

pa linearni diferencijalni operator puzanja Za Voigt–Kelvinov model glasi:

$$Q^{-1}(t) = \frac{1}{E}\left(1 - e^{-\frac{tE}{\eta}}\right) \tag{2.119}$$

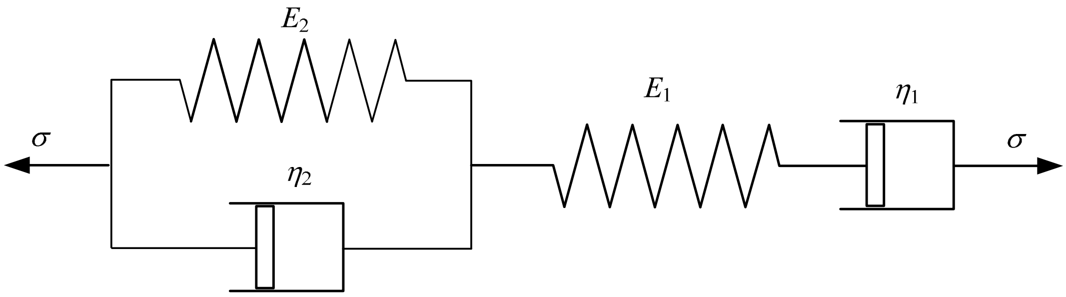


sl. 2.15. *Voigt–Kelvinov model*

Na sl. 2.16. prikazan je Burgersov model model koji se još naziva četvero-parametarski model. Budući da su elementi Maxwellovog i Kelvinovog modela postavljeni u serijski spoj, diferencijalni operator puzanja se dobiva zbrajanjem diferencijalnih operatora puzanja ta dva modela:

$$Q^{-1} = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{E_2}\left(1 - e^{-\frac{tE_2}{\eta_2}}\right). \tag{2.120}$$

gdje η_1 dolazi na mjesto od η u izrazu (2.116), a E_2 i η_2 dolaze na mjesto od E i η u izrazu (2.119).



sl. 2.16. *Burgersov model*

Za razliku od Maxwellovog modela, Burgersov model dobro opisuje i primarno i sekundarno puzanje.

Budući da se viskoelastičnost opisuje diferencijalnim jednadžbama, radi jednostavnosti često se uvodi Laplaceova transformacija jer se tako eliminira vremenska varijabla pa se viskoelastični problem svodi na elastični problem [34]. Laplaceova transformacija funkcije *f(t)* određena je integralom oblika:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \,. \tag{2.121}$$

Međutim, Carsonova transformacija:

$$\widehat{f}(s) = s\,\tilde{f}(s) \tag{2.122}$$

je još prikladnija jer u Carsonovoj domeni vrijedi [35]:

$$\widehat{Q}(s)\widehat{Q}^{-1}(s) = 1 \,. \tag{2.123}$$

Carsonovom transformacijom izraza (2.116) i (2.120) te uvrštavanjem u izraz (2.123) dobivaju se linearni diferencijalni operatori relaksacije i puzanja u Carsonovoj domeni za Maxwellov i Burgersov model:

$$\widehat{Q}(s) = \frac{1}{\widehat{Q}^{-1}(s)} = \frac{E_0\eta s}{E_0 + \eta s} \,, \tag{2.124}$$

$$\widehat{Q}(s) = \frac{1}{\widehat{Q}^{-1}(s)} = \frac{E_0\eta\left(E_2 + \eta_2 s\right)s}{E_0E_2 + \left(\eta E_2 + E_0\left(\eta + \eta_2\right)\right)s + \eta\eta_2 s^2} \,. \tag{2.125}$$

Laméove značajke matrice mogu se izraziti preko linearnog diferencijalnog operatora relaksacije:

$$\widehat{\lambda}_m = \frac{\widehat{Q}_m \nu_m}{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}, \tag{2.126}$$

$$\widehat{\mu}_m = \frac{\widehat{Q}_m}{2(1+\nu_m)}. \tag{2.127}$$

Budući da je pretpostavljeno da su vlakna elastična, Laméove značajke vlakna su:

$$\lambda_f = \frac{E_f \nu_f}{(1+\nu_f)(1-2\nu_f)}, \tag{2.128}$$

$$\mu_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}. \tag{2.129}$$

U izrazima (2.126) -(2.129) ν_m, ν_f i E_f su: Poissonov koeficijent matrice, Poissonov koeficijent vlakna i modul elastičnosti vlakna. Promjena tih značajki u vremenu je zanemariva [36].

Tenzor viskoelastične relaksacije u Carsonovoj domeni za kompozite ojačane jednosmjernim cilindričnim vlaknima preuzet je od Luciana i Barbera [37]:

$$\widehat{L}_{11}(s) = \widehat{\lambda}_m + 2\widehat{\mu}_m - \frac{V_f}{H}\left(\frac{S_3^2}{\widehat{\mu}_m^2} + \frac{2S_3S_6}{\widehat{\mu}_m^2 g} + \frac{aS_3}{\widehat{\mu}_m c} + \frac{S_6^2 - S_7^2}{\widehat{\mu}_m^2 g^2} + \frac{aS_6 + bS_7}{\widehat{\mu}_m gc} + \frac{a^2-b^2}{4c^2} \right), \tag{2.130}$$

$$\widehat{L}_{12}(s) = \widehat{\lambda}_m + \frac{V_f b}{H}\left(\frac{S_3}{2c\widehat{\mu}_m} - \frac{S_6 - S_7}{2c\widehat{\mu}_m g} - \frac{a-b}{4c^2} \right), \tag{2.131}$$

$$\widehat{L}_{23}(s) = \widehat{\lambda}_m + \frac{V_f}{H}\left(\frac{aS_7}{2c\widehat{\mu}_m g} - \frac{ab+b^2}{4c^2} \right), \tag{2.132}$$

$$\widehat{L}_{22}(s) = \widehat{\lambda}_m + 2\widehat{\mu}_m - \frac{V_f}{H}\left(\frac{aS_3}{2\widehat{\mu}_m c} + \frac{aS_6}{2\widehat{\mu}_m cg} + \frac{a^2-b^2}{4c^2} \right), \tag{2.133}$$

$$\widehat{L}_{44}(s) = \widehat{\lambda}_m - V_f\left(-\frac{2S_3}{\widehat{\mu}_m} + \frac{1}{\widehat{\mu}_m - \mu_f} + \frac{4S_7}{\widehat{\mu}_m(2-2\nu_f)} \right)^{-1}, \tag{2.134}$$

$$\widehat{L}_{66}(s) = \widehat{\lambda}_m - V_f\left(-\frac{S_3}{\widehat{\mu}_m} + \frac{1}{\widehat{\mu}_m - \mu_f} \right)^{-1}, \tag{2.135}$$

gdje je:

$$a = \hat{\mu}_f - \hat{\mu}_m - 2\hat{\mu}_f \nu_m + 2\hat{\mu}_m \nu_f \,, \tag{2.136}$$

$$b = \nu_f \mu_f - \hat{\mu}_m \nu_m - 2\mu_f \nu_m \nu_f + 2\hat{\mu}_m \nu_m \nu_f \,, \tag{2.137}$$

$$c = \left(\hat{\mu}_m - \mu_f\right)\left(\mu_f - \hat{\mu}_m - 2\mu_f \nu_m - \hat{\mu}_m \nu_m + \mu_f \nu_f + 2\hat{\mu}_m \nu_f + \mu_f \nu_f + 2\hat{\mu}_m \nu_f \nu_m - 2\mu_f \nu_f \nu_m\right), \tag{2.138}$$

$$c = 2 - 2\nu_m \,, \tag{2.139}$$

$$H = \frac{aS_3^2}{2\hat{\mu}_m^2 c} - \frac{aS_6 S_3}{\hat{\mu}_m^2 cg} + \frac{\left(S_6^2 - S_7^2\right)}{2\hat{\mu}_m^2 g^2 c} + \frac{S_3\left(b^2 - a^2\right)}{2\hat{\mu}_m c^2} + \frac{S_6\left(a^2 - b^2\right) + S_7\left(ab + b^2\right)}{2\hat{\mu}_m g c^2} + \\ + \frac{a^3 - 2b^3 - 3ab}{8c^3} \,. \tag{2.140}$$

Vrijednosti S_3, S_6 i S_7 preuzete su od Nemat-Nasera et al. [38] uzimajući u obzir geometriju vlakana i izražene su kao parabolične funkcije [39]:

$$S_3 = 0,49247 - 0,47603V_f - 0,02748V_f^2 \,, \tag{2.141}$$

$$S_6 = 0,36844 - 0,14944V_f - 0,27152V_f^2 \,, \tag{2.142}$$

$$S_7 = 0,12346 - 0,32035V_f - 0,23517V_f^2 \,. \tag{2.143}$$

Komponente tenzora elastičnosti trasverzalno izotropnih materijala iz izraza (2.47) u Carsonovoj domeni mogu se izraziti preko komponenti tenzora viskoelastične relaksacije [28]:

$$\hat{C}_{11}(s) = \hat{L}_{11}(s) \,, \tag{2.144}$$

$$\hat{C}_{12}(s) = \hat{L}_{12}(s) \,, \tag{2.145}$$

$$\hat{C}_{22}(s) = \frac{3}{4}\hat{L}_{22}(s) + \frac{1}{4}\hat{L}_{23}(s) + \frac{1}{2}\hat{L}_{44}(s) \,, \tag{2.146}$$

$$\hat{C}_{23}(s) = \frac{1}{4}\hat{L}_{22}(s) + \frac{3}{4}\hat{L}_{23}(s) - \frac{1}{2}\hat{L}_{44}(s) \,, \tag{2.147}$$

$$\hat{C}_{66}(s) = \hat{L}_{66}(s) \,. \tag{2.148}$$

Izrazi (2.55)-(2.58) u Carsonovoj domeni su onda:

$$\hat{Q}_{11}(s) = \hat{C}_{11}(s) - \frac{\hat{C}_{12}^2(s)}{\hat{C}_{22}(s)} \,, \tag{2.149}$$

$$\widehat{Q}_{12}(s)=\widehat{C}_{12}(s)-\frac{\widehat{C}_{23}(s)\widehat{C}_{12}(s)}{\widehat{C}_{22}(s)}, \tag{2.150}$$

$$\widehat{Q}_{22}(s)=\widehat{C}_{22}(s)-\frac{\widehat{C}^{2}_{23}(s)}{\widehat{C}_{22}(s)}, \tag{2.151}$$

$$\widehat{Q}_{66}(s)=\widehat{C}_{66}(s). \tag{2.152}$$

Carsonova transformacija jednoznačne funkcije je, kao i Laplaceova transformacija, jednoznačna. Isto tako je i transformacija slike tj. obrnuta transformacija u originalnu funciju jednoznačna. Obrnutom Carsonovom transformacijom dobivaju se komponente reduciranog tenzora elastičnosti Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} i Q_{66} u vremenskoj domeni. U Računalnom programu Matlab izračunate su vrijednosti komponente reduciranog tenzora elastičnosti za kompozitni materijal sa polimernom matricom ED-6 i staklenim vlaknima volumnog udjela V_f = 0,54 koji je analiziran u primjeru **5.3.11. i 5.3.12.** Rezultati su prikazani u tab. 2.1. u ovisnosti o vremenu *t*. Značajke materijala dane su u tab. 5.5.

***t* (h)**	**0**	**50**	**100**	**200**	**500**	**1000**	**2000**	**5000**	**10000**	**20000**	**50000**
$\boldsymbol{Q_{11}}$	39,45	38,58	38,19	37,95	37,85	37,79	37,69	37,45	37,23	37,09	37,07
$\boldsymbol{Q_{12}}$	10,67	7,04	5,37	4,22	3,77	3,52	3,08	2,05	1,04	0,27	0,005
$\boldsymbol{Q_{22}}$	2,98	1,96	1,49	1,17	1,05	0,98	0,85	0,57	0,29	0,07	0,001
$\boldsymbol{Q_{66}}$	3,54	2,31	1,75	1,37	1,23	1,14	0,99	0,65	0,32	0,08	0,001

tab. 2.1. *Komponente reduciranog tenzora elastičnosti (*GPa*)*

3. Tankostjeni kompozitni gredni nosači

3.1. Osnovne pretpostavke

Gredni nosači su deformabilna tijela čije su dimenzije poprečnog presjeka relativno male u odnosu na duljinu nosača. Pritom, poprečni presjek može biti puni ili tankostjeni. Tankostjeni gredni nosači su oni nosači čija je jedna dimenzija poprečnog presjeka (debljina stjenke) puno manja od ostalih. Njihova glavna prednost u usporedbi s grednim nosačima punog poprečnog presjeka je što su, s obzirom na utrošak materijala, učinkovitiji za prihvaćanje sila okomitih na uzdužnu os. Međutim, ponašanje takvih konstrukcija je puno složenije i takve konstrukcije su sklonije gubitku stabilne ravnotežne forme [40, 41, i 42]. Zato je analiza tankostjenih konstrukcija puno zahtjevnija od debljih konstrukcija i matematički modeli su puno složeniji.

Prema obliku, tankostjeni poprečni presjeci se dijele na otvorene, zatvorene i kombinirane, a s obzirom na simetričnost dijele se na jednoosno simetrične, dvoosno simetrične i nesimetrične. Kod dvoosno simetričnih poprečnih presjeka centar smicanja i težište se poklapaju. Centar smicanja je ona točka poprečnog presjeka za koju je suma momenata svih unutrašnjih smičnih sila pri savijanju jednaka nuli. Centar smicanja se poklapa s centrom torzije [43,44]. Pod centrom se torzije podrazumijeva ona točka poprečnog presjeka oko koje se odvija rotacija poprečnog presjeka pri uvijanju.

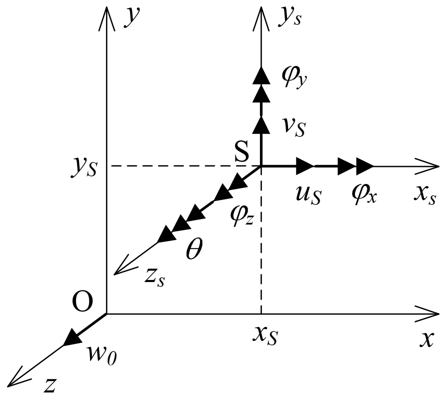
Gredni nosači mogu preuzimati aksijalna i smična opterećenja te opterećenja na savijanje i uvijanje. Bitne razlike poprečnih presjeka grednih nosača se ispoljavaju pri uvijanju. Neokrugli poprečni presjeci se vitopere pri uvijanju tj. točke poprečnog presjeka, osim rotacijskih pomaka, doživljavaju i aksijalne pomake. Kada aksijalni pomaci nisu spriječeni, svi poprečni presjeci se mogu jednako deformirati pa se u njima javljaju samo primarna tangencijalna naprezanja. Takvo uvijanje se naziva čisto ili St. Venantovo uvijanje [45]. Ako su aksijalni pomaci ograničeni ili je torzijski moment promjenjiv uzduž nosača, tada se javljaju normalna naprezanja koja uzrokuju sekundarna tangencijalna naprezanja. Takvo uvijanje se naziva Vlasovo uvijanje ili uvijanje s ograničenim vitoperenjem [46]. Pri uvijanju zatvorenih tankostjenih nosača i nosača s punim poprečnim presjekom, sekundarna tangencijalna naprezanja se mogu zanemariti.

Ovaj rad je ograničen na analizu tankostjenih kompozitnih grednih konstrukcija pri čemu se model temelji na klasičnoj teoriji laminata (CLT) [1] te sljedećim pretpostavkama:

- gredni nosač je pravocrtan
- projekcija konture poprečnog presjeka na ravninu okomitu uzdužnoj osi nosača ostaje nepromijenjena tijekom procesa deformiranja, odnosno ponaša se kao kruto tijelo (Bernoullyjeva pretpostavka)
- posmična je deformacija u srednjoj plohi nosača jednaka nuli (Vlasova pretpostavka)
- svaki se dio grede ponaša kao tanka ljuska, što znači da pravac okomit na konturu ostaje okomit tijekom cijelog procesa deformiranja (Kirchhoffova pretpostavka)
- pomaci su veliki, a deformacije male

3.2. Polje pomaka

Na sl. 3.1. prikazani su pomaci poprečnog presjeka grednog nosača uslijed aksijalnog opterećenja, savijanja i uvijanja.



sl. 3.1. *Pomaci poprečnog presjeka kako krutog tijela*

Cartesijev koordinatni sustav (z, x, y) odabran je tako da se os z podudara s uzdužnom osi nosača koja prolazi kroz težišta O svih poprečnih presjeka. Koordinatne osi x i y glavne su osi inercije poprečnog presjeka. Komponente pomaka poprečnog presjeka kao krutog tijela su:

w_{o}	– translacijski pomak težišta O po pravcu osi z,
u_{s} , v_{s}	– translacijski pomaci centra smicanja S po pravcima osi x_{s} i y_{s},
φ_{z}, φ_{x} , φ_{y}	– rotacijski pomaci poprečnoga presjeka oko osi z_{s}, x_{s} i y_{s},
θ	– parametar vitoperenja poprečnoga presjeka definiran u odnosu na centar smicanja.

pri čemu je:

(z_{s}, x_{s}, y_{s})	– koordinatni sustav s ishodištem u S, a paralelan s koordinatnim sustavom (z, x, y).

Pri tome je:

$$\left.\begin{aligned} w_0 = w_0(z),\quad u_s = u_s(z),\quad v_s = v_s(z),\quad \varphi_z = \varphi_z(z),\\ \varphi_x = \frac{dv_s}{dz} = \varphi_x(z),\quad \varphi_y = \frac{du_s}{dz} = \varphi_y(z),\quad \theta = -\frac{d\varphi_z}{dz} = \theta(z) \end{aligned}\right\}. \tag{3.1}$$

Iz izraza (3.1) je vidljivo da su sve komponente pomaka funkcije jedino varijable z, a parametar θ je istovjetan negativnom jediničnom kutu torzije.

Polje pomaka točaka poprečnog presjeka definirano je izrazom:

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{uk}}^{\mathrm{T}} = \{W \quad U \quad V\} = \{w+\tilde{w} \quad u+\tilde{u} \quad v+\tilde{v}\}, \tag{3.2}$$

pri čemu su *w*, *u* i *v* komponente linearnog polja pomaka:

$$\begin{aligned} w &= w_o - y\frac{dv_s}{dz} - x\frac{du_s}{dz} - \omega\frac{d\varphi_z}{dz}, \\ u &= u_s - \left(y - y_s\right)\varphi_z, \\ v &= v_s + \left(x - x_s\right)\varphi_z \end{aligned} \tag{3.3}$$

dok $\tilde{w}$, $\tilde{u}$ i $\tilde{v}$, predstavljaju veličine drugoga reda zbog uključenih efekata velikih rotacija u skladu s [6, 7] i iznose:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{1}{2}\left[\varphi_z\varphi_x\left(x - x_s\right) + \varphi_z\varphi_y\left(y - y_s\right)\right], \\ \tilde{u} &= \frac{1}{2}\left[\varphi_z^2 x_s + \varphi_x\varphi_y y - \left(\varphi_z^2 + \varphi_y^2\right)x\right], \\ \tilde{v} &= \frac{1}{2}\left[\varphi_z^2 y_s + \varphi_x\varphi_y x - \left(\varphi_z^2 + \varphi_x^2\right)y\right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.3. Deformacija

U skladu s nelinearnim poljem pomaka tenzor deformacije je:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\left(u_i + \tilde{u}_i\right)_{,j} + \left(u_j + \tilde{u}_j\right)_{,i} + \left(u_k + \tilde{u}_k\right)_{,i}\left(u_k + \tilde{u}_k\right)_{,j}\right], \tag{3.5}$$

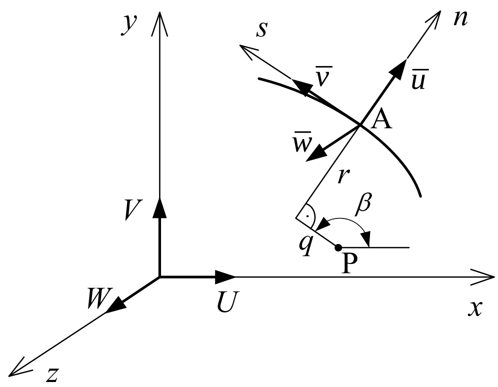
odnosno:

$$\varepsilon_{\mathrm{ij}} = \mathrm{e}_{\mathrm{ij}} + \eta_{\mathrm{ij}} + \tilde{\mathrm{e}}_{\mathrm{ij}}, \tag{3.6}$$

uz:

$$2\mathrm{e}_{\mathrm{ij}} = \mathrm{u}_{\mathrm{i,j}} + \mathrm{u}_{\mathrm{j,i}},\ 2\eta_{\mathrm{ij}} = \mathrm{u}_{\mathrm{k,i}}\,\mathrm{u}_{\mathrm{k,j}},\ 2\tilde{\mathrm{e}}_{\mathrm{ij}} = \tilde{\mathrm{u}}_{\mathrm{i,j}} + \tilde{\mathrm{u}}_{\mathrm{j,i}}, \tag{3.7}$$

pri čemu zarezi označavaju parcijalne derivacije s obzirom na koordinatne osi.



sl. 3.2. *Pomaci točaka konture poprečnog presjeka*

Na sl. 3.2. prikazan je dio konture prostornog tankostjenog grednog nosača. U konturnom koordinatnom sustavu (*z*, *n*, *s*) definirani su pomaci srednje linije konture presjeka $\overline{w},\overline{u},\overline{v}$, dok su pomaci točaka udaljenih od srednje linije definirani kao:

$$w(z,s,n)=\overline{w}-n\frac{\partial\overline{u}}{\partial z};\qquad v(z,s,n)=\overline{v}-n\frac{\partial\overline{u}}{\partial s};\qquad u(z,s,n)=\overline{u}\,, \tag{3.8}$$

pri čemu je s *r* označen radijus konture, a *q* udaljenost proizvoljno odabrane točke pola P od pravca normale *n* i prema sl. 3.2. iznose:

$$q=(x-x_P)\cos\beta+(y-y_P)\sin\beta\,, \tag{3.9}$$

$$r=(x-x_P)\sin\beta-(y-y_P)\cos\beta\,. \tag{3.10}$$

Veza grednih i konturnih pomaka izražena je kao:

$$\begin{aligned}&\overline{w}=W(z,s,n);\\&\overline{v}=U(z,s,n)\cos\beta+V(z,s,n)\sin\beta;\\&\overline{u}=U(z,s,n)\sin\beta-V(z,s,n)\cos\beta.\end{aligned}\quad . \tag{3.11}$$

S obzirom da se u konturnom koordinatnom sustavu pomaci srednje linije konture presjeka $\overline{w},\overline{u},\overline{v}$ sastoje od linearne i nelinearne komponente, u skladu s izrazom (3.11) moguće je pisati:

$$\begin{aligned}&\overline{w}^L=W^L(z,s,n);\\&\overline{v}^L=U^L(z,s,n)\cos\beta+V^L(z,s,n)\sin\beta;\\&\overline{u}^L=U^L(z,s,n)\sin\beta-V^L(z,s,n)\cos\beta;\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}&\overline{w}^{NL}=W^{NL}\left(z,s,n\right);\\&\overline{v}^{NL}=U^{NL}\left(z,s,n\right)\cos\beta+V^{NL}\left(z,s,n\right)\sin\beta;\\&\overline{u}^{NL}=U^{NL}\left(z,s,n\right)\sin\beta-V^{NL}\left(z,s,n\right)\cos\beta,\end{aligned} \tag{3.13}$$

pri čemu indeksi L i NL označavaju linearne odnosno nelinearne komponente pomaka. U skladu s time, pomake točaka udaljenih od srednje linije iz izraza (3.8) definirane u konturnom koordinatnom sustavu (z, n, s) moguće također promatrati razdvojeno na način:

$$w^L\left(z,s,n\right)=\overline{w}^L-n\frac{\partial\overline{u}^L}{\partial z};\quad v^L\left(z,s,n\right)=\overline{v}^L-n\frac{\partial\overline{u}^L}{\partial s};\quad u^L\left(z,s,n\right)=\overline{u}^L; \tag{3.14}$$

$$w^{NL}\left(z,s,n\right)=\overline{w}^{NL}-n\frac{\partial\overline{u}^{NL}}{\partial z};\quad v^{NL}\left(z,s,n\right)=\overline{v}^{NL}-n\frac{\partial\overline{u}^{NL}}{\partial s};\quad u^{NL}\left(z,s,n\right)=\overline{u}^{NL}, \tag{3.15}$$

poštujući Vlasovu pretpostavku da je srednja deformacija γ_{zs} u srednjoj plohi jednaka nuli te pretpostavku da se projekcija konture poprečnog presjeka ponaša kao kruto tijelo, komponente deformacije različite od nule u egzaktnom obliku su:

$$e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}-n\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2};\;\; e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}-n\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}; \tag{3.16}$$

$$\eta_{zz}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right];\;\; \eta_{zs}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial s}; \tag{3.17}$$

$$\tilde{e}_{zz}=\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z};\;\; \tilde{e}_{zs}=\frac{\partial\tilde{w}}{\partial s}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\;\;, \tag{3.18}$$

gdje je e_{ij} dio tenzora deformacije linearan u pomacima w, u i v, η_{ij} je dio deformacije nelinearan u pomacima w, u i v, dok je $\tilde{e}_{ij}$ dio deformacije linearan u pomacima $\overline{w},\overline{u},\overline{v}$.

Uvrštavanjem izraza (3.12) u izraze (3.16) slijedi:

$$\eta_{zz}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right];\;\; \eta_{zs}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial s}; \tag{3.19}$$

$$\tilde{e}_{zz}=\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z};\;\; \tilde{e}_{zs}=\frac{\partial\tilde{w}}{\partial s}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\;\;, \tag{3.20}$$

pri čemu je odgovarajuće duljinske deformacije i zakrivljenosti srednje linije laminata s obzirom na komponente polja pomaka (3.3) moguće izraziti u obliku:

$$\overline{\varepsilon}_z^{\,L} = \frac{\partial \overline{w}^L}{\partial z} = \frac{dw_o}{dz} - y\frac{d^2 v_s}{dz^2} - x\frac{d^2 u_s}{dz^2} - \omega\frac{d^2\varphi_z}{dz^2}\,; \tag{3.21}$$

$$\kappa_z^{\,L} = -\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} = -\frac{d^2 u_s}{dz^2}\sin\beta + \frac{d^2 v_s}{dz^2}\cos\beta + \frac{d^2\varphi_z}{dz^2}\cdot q\,; \tag{3.22}$$

$$\kappa_{zs}^{\,L} = 2\frac{d\varphi_z}{dz} \tag{3.23}$$

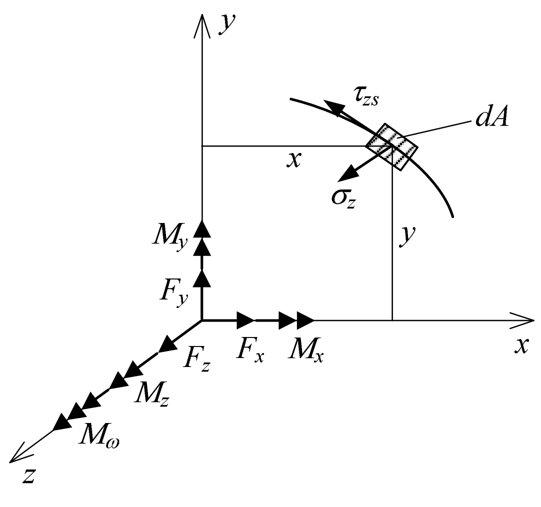
pa izrazi (3.19) i (3.20) postaju:

$$e_{zz} = \frac{dw_o}{dz} - \frac{d^2 u_s}{dz^2}(x + n\sin\beta) - \frac{d^2 v_s}{dz^2}(y - n\cos\beta) - \frac{d^2\varphi_z}{dz^2}(\omega - nq)\,; \tag{3.24}$$

$$e_{zs} = 2n\frac{d\varphi_z}{dz}. \tag{3.25}$$

Analognim je pristupom moguće i nelinearne komponente deformacije iz izraza (3.17) i (3.18) izraziti preko odgovarajućih komponenata polja grednih pomaka. Cilj je ovih transformacija u konačnici dobiti odgovarajuće krutosti grednog člana preko rezultanti unutarnjih sila kako je razrađeno u narednim poglavljima. Pri tome je uočeno da se izrazi proizašli od nelinearnih dijelova pomaka u potpunosti poklapaju s izrazima već izvedenim u literaturi [47] i kao takvi ne predstavljaju nikakvu novinu te je iz tog razloga taj dio izvoda ovdje izostavljen.

3.4. Unutarnje sile



sl. 3.3. *Pomaci točaka konture poprečnog presjeka*

Rezultante unutarnjih sila poprečnog presjeka grede prema sl. 3.3. čine:

-aksijalna sila:

$$F_z = \int_A \sigma_z \, dn \, ds \,; \tag{3.26}$$

-momenti savijanja:

$$M_x = \int_A \sigma_z (y - n\cos\beta) dnds \,; \tag{3.27}$$

$$M_y = \int_A \sigma_z (x + n\sin\beta) dnds \,; \tag{3.28}$$

-moment uvijanja:

$$M_z = \int_A \tau_{zs} n \, dnds \,; \tag{3.29}$$

-bimoment:

$$M_\omega = \int_A \sigma_z (\omega - nq) dnds \,. \tag{3.30}$$

Kao dodatni se torzijski moment pojavljuje i T_σ koji je uzrok tzv. torzijskog izvijanja kod tankostjenih grednih nosača i koji iznosi:

$$T_\sigma = \int_A \sigma_z \rho^2 dA \frac{d\varphi_z}{dz} = \overline{K} \frac{d\varphi_z}{dz} \,; \tag{3.31}$$

Pri čemu je $\overline{K}$ poznat kao Wagnerov koeficijent, a pripadni se efekt naziva Wagnerov efekt. U izrazu (3.31) ρ predstavlja udaljenost proizvoljne točke poprečnog presjeka od točke glavnog pola odnosno centra smicanja.

3.5. Rezultantne laminatne sile segmenta konture grednog presjeka

S obzirom na odgovarajuće teoretske predpostavke s početka ovog poglavlja, a uz adaptaciju na gredni koordinatni sustav (z, s, n) sa sl. 3.2., analogno izrazima (2.101) i (2.102), laminatne sile iznose:

$$N_{zz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \, dn, \qquad N_{sz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{sz} \, dn \,, \tag{3.32}$$

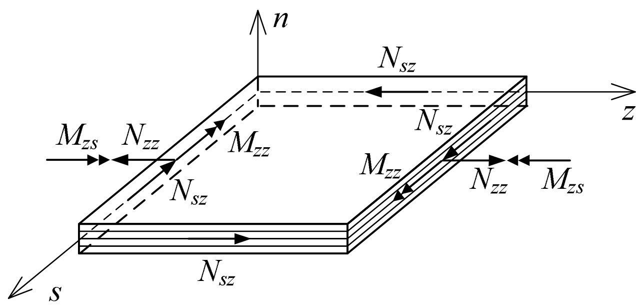
$$M_{\mathrm{zz}} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\mathrm{z}}\, n\, \mathrm{d}n, \qquad M_{\mathrm{sz}} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\mathrm{sz}}\, n\, \mathrm{d}n \tag{3.33}$$

te se izrazi (2.110) svode se na sljedeći oblik:

$$\begin{Bmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} \\ A_{16} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{sz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{16} \\ B_{16} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_z \\ \kappa_{sz} \end{Bmatrix}, \tag{3.34}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{zz} \\ M_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{16} \\ B_{16} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{sz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{16} \\ D_{16} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_z \\ \kappa_{sz} \end{Bmatrix}. \tag{3.35}$$

Iz gornjih izraza vidljivo je da se uz spomenute pretpostavke gredne teorije ukupan sustav laminatnih sila na konturi poprečnog presjeka reducira na komponente prikazane na sl. 3.4.



sl. 3.4. *Laminatne sile segmenta konture grednog presjeka*

Također, u skladu s izrazom (2.80), konstitutivna jednadžba za jedan laminatni sloj grede glasi:

$$\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11}^{\,*} & \bar{Q}_{16}^{\,*} \\ \bar{Q}_{16}^{\,*} & \bar{Q}_{66}^{\,*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zs} \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

gdje su $\bar{Q}_{\mathrm{ii}}^{\,*}$ tzv. reducirane krutosti prema (2.81)-(2.83).

U skladu s konstitutivnim jednadžbama iz (2.32), a s obzirom na (2.22) i (2.23), rezultantne sile iz (2.24)-(2.27) moguće je izraziti preko komponenata grednih pomaka na sljedeći način:

$$F_z = \varepsilon_z^0 \int_s A_{11}\, ds + \kappa_y \int_s (A_{11} x + B_{11} \sin\beta) ds + \kappa_x \int_s (A_{11} y - B_{11} \cos\beta) ds +$$

$$+ \kappa_\omega \int_s (A_{11} - B_{11} q) ds + \kappa_{sz} \int_s B_{16} ds\,, \tag{3.37}$$

$$M_y = \varepsilon_z^0 \int_s (A_{11}x + B_{11}\sin\beta)\,ds + \kappa_y \int_s (A_{11}x^2 + 2B_{11}\sin\beta + D_{11}\sin^2\beta)ds +$$
$$+\kappa_x \int_s (A_{11}xy + B_{11}y\sin\beta - B_{11}x\cos\beta + D_{11}\sin\beta\cos\beta)ds +$$
$$+\kappa_\omega \int_s (A_{11}x\omega + B_{11}\omega\sin\beta - B_{11}xq - D_{11}q\sin\beta)ds + \kappa_{sz}\int_s (B_{16}x - D_{16}\sin\beta)ds\,, \tag{3.38}$$

$$M_x = \varepsilon_z^0 \int_s (A_{11}y - B_{11}\cos\beta)\,ds + \kappa_y \int_s (A_{11}xy + B_{11}y\sin\beta - B_{11}x\cos\beta - D_{11}\sin\beta\cos\beta)ds +$$
$$+\kappa_x \int_s (A_{11}y^2 - 2B_{11}y\cos\beta + D_{11}\cos^2\beta)ds +$$
$$+\kappa_\omega \int_s (A_{11}y\omega - B_{11}\omega\cos\beta - B_{11}yq + D_{11}q\cos\beta)ds + \kappa_{sz}\int_s (B_{16}y - D_{16}\cos\beta)ds\,, \tag{3.39}$$

$$M_T = \varepsilon_z^0 \int_s B_{16}ds + \kappa_y \int_s (B_{16}x + D_{16}\sin\beta)ds + \kappa_x \int_s (B_{16}y - D_{16}\cos\beta)ds +$$
$$+\kappa_\omega \int_s (B_{16}\omega - D_{16}q)ds + \kappa_{sz}\int_s D_{66}ds\,, \tag{3.40}$$

$$M_\omega = \varepsilon_z^0 \int_s (A_{11}\omega - B_{11}q)\,ds + \kappa_y \int_s (A_{11}x\omega + B_{11}\omega\sin\beta - B_{11}xq - D_{11}q\sin\beta)ds +$$
$$+\kappa_x \int_s (A_{11}\omega y - B_{11}\omega\cos\beta - B_{11}qy + D_{11}q\cos\beta)ds +$$
$$+\kappa_\omega \int_s (A_{11}\omega^2 - 2B_{11}q\omega + D_{11}q^2)ds + \kappa_{sz}\int_s (B_{16}\omega - D_{16}q)ds\,, \tag{3.41}$$

pri čemu su deformacije i zakrivljenosti:

$$\varepsilon_z^0 = \frac{dw_o}{dz}; \qquad \kappa_y = -\frac{d^2u_s}{dz^2}; \qquad \kappa_x = -\frac{d^2v_s}{dz^2}; \qquad \kappa_\omega = -\frac{d^2\varphi_z}{dz^2}; \qquad \kappa_{sz} = 2\frac{d\varphi_z}{dz}. \tag{3.42}$$

Izraze (2.33)-(2.37) moguće je zapisati i u matričnom obliku kao:

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_y \\ M_x \\ M_\omega \\ M_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z^0 \\ \kappa_y \\ \kappa_x \\ \kappa_\omega \\ \kappa_{sz} \end{Bmatrix}, \tag{3.43}$$

pri čemu članovi matrice iznose:

$$
\begin{aligned}
&E_{11} = \int_s A_{11}\, ds\,,\\
&E_{12} = E_{21} = \int_s (A_{11} x + B_{11} \sin\beta) ds,\\
&E_{13} = E_{31} = \int_s (A_{11} y - B_{11} \cos\beta) ds,\\
&E_{14} = E_{41} = \int_s (A_{11}\omega - B_{11} q) ds,\\
&E_{15} = E_{51} = \int_s B_{16} ds,\\
&E_{22} = \int_s (A_{11} x^2 + 2B_{11} x \sin\beta + D_{11} \sin^2\beta) ds,\\
&E_{23} = E_{32} = \int_s (A_{11} xy + B_{11} y \sin\beta - B_{11} x \cos\beta - D_{11} \sin\beta\cos\beta) ds,\\
&E_{24} = E_{42} = \int_s (A_{11} x\omega + B_{11}\omega \sin\beta - B_{11} xq - D_{11} q \sin\beta) ds,\\
&E_{25} = E_{52} = \int_s (B_{16} x - D_{16} \sin\beta) ds,\\
&E_{33} = \int_s (A_{11} y^2 - 2B_{11} y \cos\beta + D_{11} \cos^2\beta) ds,\\
&E_{34} = E_{43} = \int_s (A_{11} y\omega - B_{11}\omega \cos\beta - B_{11} yq + D_{11} q \cos\beta) ds,\\
&E_{35} = E_{53} = \int_s (B_{16} y - D_{16} \cos\beta) ds,\\
&E_{44} = \int_s (A_{11}\omega^2 - 2B_{11} q\omega + D_{11} q^2) ds,\\
&E_{45} = E_{54} = \int_s (B_{16}\omega - D_{16} q) ds,\\
&E_{55} = \int_s D_{66} ds.
\end{aligned}
\quad , \tag{3.44}
$$

4. Konačnoelementna formulacija

Pri projektiranju tankostjenih grednih konstrukcija od posebne je važnosti što točnije predvidjeti granično stanje stabilnosti deformacijskih formi [47]. Kako su analitička rješenja ograničena samo na slučajeve relativno jednostavnije geometrije nosača, pri analizi je ovakvih problema evidentna nužnost uporabe neke od numeričkih metoda, npr. metode konačnih elemenata.

Metoda konačnih elemenata temelji se na podjeli kontinuuma na odgovarajući broj poddomena konačnih dimenzija, konačne elemente, koji su međusobno povezani u konačnom broju točaka, čvorovima konačnih elemenata te se time kontinuirani sustav aproksimira diskretiziranim s konačnim brojem stupnjeva slobode. Udovoljavanjem Zadovoljavanjem uvjetima ravnoteže svakog elementa i uvjetima kompatibilnosti u čvorovima konačnih elemenata problem se svodi na sustav jednadžbi koje su radi konačnih dimenzija elemenata algebarske. Rješavanjem sustava tih jednadžbi uz poštivanje rubnih uvjeta određuju se čvorne nepoznanice konačnih elemenata.

Problem analize stabilnosti grednih prostornih konstrukcija izrazito je složen zbog nevektorske prirode velikih prostornih rotacija kao i zbog rotacijske ovisnosti momenata. Pri velikim će se prostornim rotacijama induciraju torzijski momenti polutangencijalnog karaktera i momenti savijanja kvazitangencijalnog karaktera, a ukoliko su u nekom čvoru konstrukcije spojeni nekolinearni gredni konačnoelementni članovi, postojat će potreba za zbrajanjem međusobno nekompatibilnih komponenata momenata odnosno momenata koji se u svojoj naravi pri velikim prostornim rotacijama ne ponašaju jednako.

Jedna od mogućih solucija spomenutog problema uvođenje je komponenata nelinearnog polja pomaka pri izvođenju matrice krutosti grednog konačnog elementa, izraz (3.4), ili pak uporaba adekvatnih relacija za transformaciju matrice krutosti prilikom prebacivanja iz lokalnog konačnoelementnog koordinatnog sustava u globalni koordinatni sustav.

U konačnoelementnom modelu razvijenom kroz ovaj doktorski rad korištena su oba navedena pristupa. Naime razvijeni je model koncipiran tako da bude pogodan za linearnu analizu stabilnosti u smislu brze provjere kritičnog opterećenja i pripadajućeg deformacijskog moda konstrukcije, a isto tako i za nelinearnu analizu stabilnosti, dakle praćenje kompletnog odziva deformacije s obzirom na opterećenje.

U svrhu je nelinearne analize primijenjen tzv. korotacijski ili Eulerovi pristup koji je u svoj osnovi na nivou konačnog elementa linearan, a sve se nelinearnosti uvode upravo transformacijskim matricama iz lokalnog koordinatnog sustava vezanog za konačni element u globalni koordinatni sustav konstrukcije. Kako pri ovakvom pristupu nije moguće razlučiti geometrijski linearni dio matrice krutosti konačnog elementa od geometrijski nelinearnog dijela, a upravo se takvo odvajanje zahtijeva pri linearnoj analizi stabilnosti, u tu je pak svrhu nužno bilo primijeniti i ovaj drugi spomenuti pristup.

Kroz ovo će poglavlje biti pobliže opisana oba koncepta analize izvijanja uz prikaz vektora korištenih konačnih elemenata i načina izvođenja matrica krutosti konačnog elementa.

4.1. Princip virtualnih radova

U osnovi metode konačnih elemenata leži primjena principa virtualnih radova koji se temelji na činjenici da je potencijalna energija unutarnjih sila jednaka virtualnom radu vanjskih sila, te u slučaju kada nema volumenskih sila glasi:

$$\delta U = \delta W \, , \tag{4.1}$$

$$\int_V {}^tS_{ij} \, \delta\, {}^t\varepsilon_{ij} \, dV = \int_{A_\sigma} {}^tt_i \, \delta\left({}^tu_i + {}^t\tilde{u}_i \right) dA_\sigma \, , \tag{4.2}$$

gdje je δU potencijalna energija unutarnjih sila, δW je virtualni rad vanjskih sila, S_{ij} je Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste, ε_{ij} Green-Lagrangeov tenzor deformacije, t_i površinske sile, u_i i $\tilde{u}_i$ su komponente pomaka, dok je δ oznaka za varijaciju. Gornji indeks t označava da se radi o totalnim vrijednostima. Zanemari li se početne pomake i deformaciju prije izvijanja slijedi:

$$ {}^{t}S_{ij} = {}^{0}S_{ij} + S_{ij}, \quad {}^{t}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}, \quad {}^{t}t_i = {}^{0}t_i + t_i, \quad {}^{t}u_i + {}^{t}\tilde{u}_i = u_i + \tilde{u}_i, \tag{4.3} $$

pri čemu gornji lijevi indeks 0 uz S_{ij} i t_i označava da se radi o početnim vrijednostima dok veličine bez gornjeg lijevog indeksa predstavljaju inkrementalne vrijednosti.

Kako za Green-Lagrangeov tenzor deformacije prema (3.6) vrijedi:

$$ \delta\varepsilon_{ij} = \delta e_{ij} + \delta\eta_{ij} + \delta\tilde{e}_{ij}, \tag{4.4} $$

proizlazi:

$$ \int_V S_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV + \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta\eta_{ij}\,dV + \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta\tilde{e}_{ij}\,dV - \int_{A_\sigma} {}^{0}t_i\,\delta\tilde{u}_i\,dA_\sigma = \int_{A_\sigma} t_i\,\delta u_i\,dA_\sigma, \tag{4.5} $$

Izraz se može napisati i kao:

$$ \delta U_E + \delta U_G - \delta W = \delta\Pi = 0, \tag{4.6} $$

pri čemu je:

$\delta U_E = \int_V S_{ij}\,\delta e_{ij}\,dV$ -elastična potencijalna energija unutarnjih sila,

$\delta U_G = \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta\eta_{ij}\,dV + \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta\tilde{e}_{ij}\,dV - \int_{A_\sigma} {}^{0}t_i\,\delta\tilde{u}_i\,dA_\sigma$ -geometrijski potencijal početnih unutarnjih i vanjskih sila,

$\delta W = \int_{A_\sigma} t_i\,\delta u_i\,dA_\sigma$ -virtualni rad vanjskih sila,

dok Π predstavlja ukupni ili totalni potencijal.

Uz konstitutivne jednadžbe:

$$ S_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{4.7} $$

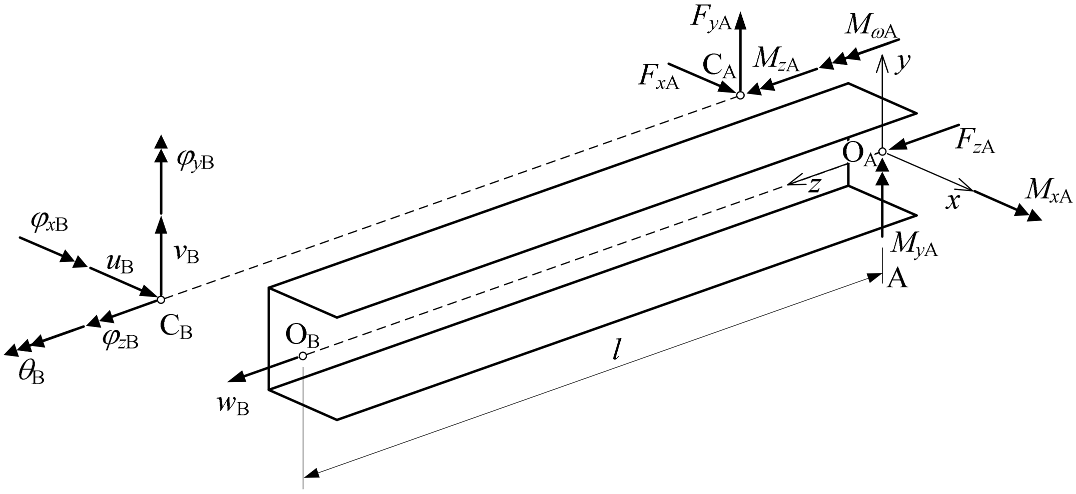
gdje C_{ijkl} predstavlja tenzor elastičnih konstanti, te uz $\delta\varepsilon_{ij} = \delta e_{ij}$, bit će:

$$ \int_V C_{ijkl}\,e_{kl}\,\delta e_{ij}\,dV + \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta\eta_{ij}\,dV + \int_V {}^{0}S_{ij}\,\delta\tilde{e}_{ij}\,dV - \int_{A_\sigma} {}^{0}t_i\,\delta\tilde{u}_i\,dA_\sigma = \int_{A_\sigma} t_i\,\delta u_i\,dA_\sigma. \tag{4.8} $$

Izraz (4.8) predstavlja linearizirani princip virtualnih radova. Integrali s lijeve strane predstavljaju geometrijski linearno odnosno nelinearno ponašanje grednog člana i posluži kao osnova za izvođenje linearne(elastične) odnosno nelinearne (geometrijske) matrice konačnog elemenata. Integral desno od znaka jednakosti predstavlja virtualni rad vanjskih sila.

4.2. Linearna analiza

Računalni program Eulam razvijen tijekom izrade ove doktorske disertacije prvenstveno je bio zamišljen kao kao alat za nelinearnu simulaciju kompozitnih grednih konstrukcija u režimima geometrijski velikih prostornih pomaka i rotacija. S obzirom na potrebu brze provjere kritičnog opterećenja kod kojega konstrukcija gubi stabilnost u računalni je program integriran i modul za izvršenje tzv. vlastite zadaće stabilnosti [48, 49] odnosno tretiranje problema stabilnosti kao problema vlastitih vrijednosti. Osnovni je koncept većim dijelom preuzet iz programa THINWALL [50, 47], a pridodani su vlastiti moduli koji se tiču specifičnosti laminatno kompozitnih poprečnih presjeka. Daljnjim će tekstom biti objašnjen izračun elastične matrice krutosti kompozitnog grednog konačnog elementa, za koji je podloga poslužio konačni element iz računalnog programa THINWALL.



sl. 4.1. *Tankostjeni gredni konačni element s 14 stupnjeva slobode*

Na sl. 4.1. prikazan je prostorni tankostjeni gredni konačni element s dva čvora označena s A i B. O i C predstavljaju težište i centar smicanja poprečnog presjeka. Konačni element ima sveukupno 14 stupnjeva slobode gibanja (7 po čvoru) te su odgovarajući vektori čvornih pomaka i čvornih sila e-tog elementa:

$$\left(\mathbf{u}^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}} = \left\{ w_{\mathrm{oA}}, u_{\mathrm{sA}}, v_{\mathrm{sA}}, \varphi_{\mathrm{zA}}, \varphi_{\mathrm{xA}}, \varphi_{\mathrm{yA}}, w_{\mathrm{oB}}, u_{\mathrm{sB}}, v_{\mathrm{sB}}, \varphi_{\mathrm{zB}}, \varphi_{\mathrm{xB}}, \varphi_{\mathrm{yB}}, \theta_{\mathrm{A}}, \theta_{\mathrm{B}} \right\}, \tag{4.9}$$

$$\left(\mathbf{f}^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}} = \left\{ F_{\mathrm{zA}}\; F_{\mathrm{xA}}\; F_{\mathrm{yA}}\; M_{\mathrm{zA}}\; M_{\mathrm{xA}}\; M_{\mathrm{yA}}\; F_{\mathrm{zB}}\; F_{\mathrm{xB}}\; F_{\mathrm{yB}}\; M_{\mathrm{zB}}\; M_{\mathrm{xB}}\; M_{\mathrm{yB}}\; M_{\omega\mathrm{A}}\; M_{\omega\mathrm{B}} \right\}. \tag{4.10}$$

Uvođenjem izraza(3.24) i (3.25) u izraze za δU_E i δU_G dobiva se:

$$\delta U_E = \int_V (\sigma_z \delta e_{zz} + \tau_{sz} \delta e_{sz}) dV =$$

$$= \int_0^l \int_A \left\{ \sigma_z \left[\delta \frac{dw_o}{dz} - (x + n\sin\beta)\delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} - (y - n\cos\beta)\delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} - (\omega - nq)\delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \tau_{sz} \cdot 2n \cdot \delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right] \right\} dAdz =$$

$$= \int_0^l \left[F_z \,\delta \frac{dw_o}{dz} - M_y \,\delta \frac{d^2 u_s}{dz^2} - M_x \,\delta \frac{d^2 v_s}{dz^2} - M_\omega \,\delta \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + 2M_z \,\delta \frac{d\varphi_z}{dz} \right] dz \,, \tag{4.11}$$

$$\delta U_G = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ {}^0F_z \left[\delta \left(\frac{dw_o}{dz} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv_s}{dz} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_s}{dz} \right)^2 + 2y_s \,\delta \left(\frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) - 2x_s \,\delta \left(\frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) \right] + \right.$$

$$+ {}^0F_x \left[\delta\left(\varphi_x \varphi_z\right) + 2\,\delta \left(\frac{dv_s}{dz} \varphi_z \right) - 2\delta \left(\frac{dw_o}{dz} \varphi_y \right) + 2x_s \,\delta \left(\frac{d\varphi_y}{dz} \varphi_y \right) - 2y_s \,\delta \left(\frac{d\varphi_x}{dz} \varphi_y \right) \right] +$$

$$+ {}^0F_y \left[\delta\left(\varphi_y \varphi_z\right) - 2\,\delta \left(\frac{du_s}{dz} \varphi_z \right) + 2\delta \left(\frac{dw_o}{dz} \varphi_x \right) - 2x_s \,\delta \left(\frac{d\varphi_y}{dz} \varphi_x \right) + 2y_s \,\delta \left(\frac{d\varphi_x}{dz} \varphi_x \right) \right] +$$

$$+ {}^0M_x \left[\delta \left(\frac{d\varphi_y}{dz} \varphi_z \right) + \delta \left(\frac{d\varphi_z}{dz} \varphi_y \right) - 2\delta \left(\frac{du_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + 2\delta \left(\frac{dw_o}{dz} \frac{d\varphi_x}{dz} \right) \right] +$$

$$+ {}^0M_y \left[-\delta \left(\frac{d\varphi_x}{dz} \varphi_z \right) - \delta \left(\frac{d\varphi_z}{dz} \varphi_x \right) - 2\delta \left(\frac{dv_s}{dz} \frac{d\varphi_z}{dz} \right) + 2\delta \left(\frac{dw_o}{dz} \frac{d\varphi_y}{dz} \right) \right] +$$

$$+{}^{0}M_{z}\left[\delta\left(\frac{d\varphi_{x}}{dz}\varphi_{y}\right)-\delta\left(\frac{d\varphi_{y}}{dz}\varphi_{x}\right)\right]+{}^{0}\bar{K}\,\delta\left(\frac{d\varphi_{z}}{dz}\right)^{2}+{}^{0}M_{\omega}\left[\delta\left(\frac{dw_{o}}{dz}\frac{d\theta}{dz}\right)\right]\Bigg\}dz\,, \tag{4.12}$$

Na osnovi integrala (4.23) dobiva se elastična matrica krutosti konačnog elementa, dok iz integrala (4.24) slijedi geometrijska matrica krutosti, odnosno:

$$\delta U_{\mathrm{E}}=\left(\delta\mathbf{u}^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}\;\mathbf{u}^{\mathrm{e}}\,, \tag{4.13}$$

$$\delta U_{G}=\left(\delta\mathbf{u}^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}\;\mathbf{u}^{\mathrm{e}}\,. \tag{4.14}$$

Usporedbom integrala (4.11) i (4.12) s istovjetnim izrazima iz [47] uočava se identičnost izraza (4.12), budući da je geometrijski potencijal čine produkti čvornih sila i komponenata pomaka. Iz tog razloga geometrijska matrica krutosti ne predstavlja specifičnost kompozitnih grednih nosača. Isto nije slučaj s elastičnim dijelom potencijala te je elastičnu matricu krutosti potrebno izračunati uzimajući u obzir sve članove proizašle iz sprege svih komponenata opterećenja i deformiranja, a u skladu s pretpostavkama iz 3. poglavlja.

4.2.1. Određivanje linearne matrice krutosti

Integral (4.11) je uz uvrštavanje izraza (3.44), moguće rastaviti na podintegrale:

$$\delta U_{E}=\int_{0}^{l}E_{11}\frac{dw_{o}}{dz}\delta\frac{dw_{o}}{dz}dz-\int_{0}^{l}E_{12}\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}\delta\frac{dw_{o}}{dz}dz-\int_{0}^{l}E_{13}\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}\delta\frac{dw_{o}}{dz}dz-\int_{0}^{l}E_{14}\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}\delta\frac{dw_{o}}{dz}dz+$$

$$+\int_{0}^{l}2E_{15}\frac{d\varphi_{z}}{dz}\delta\frac{dw_{o}}{dz}dz-\int_{0}^{l}E_{21}\frac{dw_{o}}{dz}\delta\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}dz+\int_{0}^{l}E_{22}\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}dz+\int_{0}^{l}E_{23}\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}dz+$$

$$+\int_{0}^{l}E_{24}\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}dz-\int_{0}^{l}2E_{25}\frac{d\varphi_{z}}{dz}\delta\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}dz-\int_{0}^{l}E_{31}\frac{dw_{0}}{dz}\delta\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}dz+\int_{0}^{l}E_{32}\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}dz+$$

$$+\int_{0}^{l}E_{33}\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}dz+\int_{0}^{l}E_{34}\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}dz-\int_{0}^{l}2E_{35}\frac{d\varphi_{z}}{dz}\delta\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}dz-\int_{0}^{l}E_{41}\frac{dw_{0}}{dz}\delta\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}dz+$$

$$+\int_{0}^{l}E_{42}\frac{d^{2}u_{s}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}dz+\int_{0}^{l}E_{43}\frac{d^{2}v_{s}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}dz+\int_{0}^{l}E_{44}\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}\delta\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}dz-\int_{0}^{l}2E_{45}\frac{d\varphi_{z}}{dz}\delta\frac{d^{2}\varphi_{z}}{dz^{2}}dz+$$

$$+\int_0^l 2E_{51}\frac{dw_0}{dz}\delta\frac{d\varphi_z}{dz}dz-\int_0^l 2E_{52}\frac{d^2u_s}{dz^2}\delta\frac{d\varphi_z}{dz}dz-\int_0^l 2E_{53}\frac{d^2v_s}{dz^2}\delta\frac{d\varphi_z}{dz}dz-\int_0^l 2E_{54}\frac{d^2\varphi_z}{dz^2}\delta\frac{d\varphi_z}{dz}dz+$$

$$+\int_0^l 4E_{55}\frac{d\varphi_z}{dz}\delta\frac{d\varphi_z}{dz}dz\,. \tag{4.15}$$

Promatraju li se zasebno deformacije koje potječu od aksijalnog opterećenja, momenata savijanja u ravninama (z, x) i (z, y), odnosno torzije te se za pomake u polju konačnog elementa uvedu sljedeće aproksimacije:

$$w_0=\mathbf{N}_w\begin{Bmatrix}w_{0\mathrm{A}}\\ w_{0\mathrm{B}}\end{Bmatrix},\quad u_0=\mathbf{N}_u\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{sA}}\\ \varphi_{\mathrm{yA}}\\ u_{\mathrm{sB}}\\ \varphi_{\mathrm{yB}}\end{Bmatrix},\quad v_0=\mathbf{N}_v\begin{Bmatrix}v_{\mathrm{sA}}\\ \varphi_{\mathrm{xA}}\\ v_{\mathrm{sB}}\\ \varphi_{\mathrm{xB}}\end{Bmatrix},\quad \varphi_z=\mathbf{N}_\varphi\begin{Bmatrix}\varphi_{\mathrm{zA}}\\ \theta_{\mathrm{A}}\\ \varphi_{\mathrm{zB}}\\ \theta_{\mathrm{B}}\end{Bmatrix}, \tag{4.16}$$

gdje su $\mathbf{N}_w,\mathbf{N}_u,\mathbf{N}_v$ i $\mathbf{N}_\varphi$ interpolacijske funkcije:

$$\mathbf{N}_{\mathrm{w}}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{z}{l} & \dfrac{z}{l}\end{bmatrix},\ \mathbf{N}_{\mathrm{u}}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{3z^2}{l}+\dfrac{2z^3}{l^2} & z-\dfrac{2z^2}{l}+\dfrac{z^3}{l^2} & \dfrac{3z^2}{l^2}-\dfrac{2z^3}{l^3} & -\dfrac{z^2}{l}+\dfrac{z^3}{l^2}\end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$\mathbf{N}_{\mathrm{v}}=\mathbf{N}_{\varphi}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{3z^2}{l}+\dfrac{2z^3}{l^2} & -z+\dfrac{2z^2}{l}-\dfrac{z^3}{l^2} & \dfrac{3z^2}{l^2}-\dfrac{2z^3}{l^3} & -\dfrac{z^2}{l}+\dfrac{z^3}{l^2}\end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Integriranjem izraza iz (4.27) po duljini konačnog elementa dobit će se članovi koji asembliranjem na odgovarajuće pozicije matrice 14×14 formiraju elastičnu matricu krutosti konačnog elementa.

4.2.2. Jednadžba konačnog elementa i vlastita zadaća stabilnosti

Elastična matrica krutosti dobivena na način opisan u prethodnome poglavlju zajedno s geometrijskom matricom krutosti iz [47] zajedno predstavljaju ukupnu matricu krutosti konačnog elementa. Slijedom toga kao jednadžba i-tog konačnog elementa dobiva se:

$$\left(\mathbf{k}_E^e+\mathbf{k}_G^e\right)\mathbf{u}^e=\mathbf{f}^e. \tag{4.19}$$

U cilju formiranja jednadžbe konstrukcije, izraze (4.19) definirane u lokalnom koordinatnom sustavu za sve konačne elemente koji čine konstrukciju, potrebno je transformirati u globalni sustav pa se kao jednadžba krutosti dobiva:

$$\left(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G\right)\mathbf{U} = \mathbf{F}, \tag{4.20}$$

gdje $\mathbf{K}_E$ označava elastičnu matrica krutosti konstrukcije, $\mathbf{K}_G$ geometrijsku matrica krutosti konstrukcije, a **U** i **F** su vektori inkrementalnih čvornih pomaka i čvornih sila konstrukcije.

Jednadžba (4.32) nelinearna je u pomacima **U** jer je $\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G(\mathbf{U})$ te se mora rješavati inkrementalno-iterativno, no kako je za svaku razinu vanjskog opterećenja odnos unutarnjih sila uvijek isti te smatrajući promjenu unutarnjih sila proporcionalnu promjeni vanjskog opterećenja, moguće je kod slaganja matrice $\mathbf{K}_G$ izlučivanje zajedničkog parametra λ, nakon čega je preostali dio matrice linearan. U tom se slučaju izraz (4.32) može napisati [47,48]:

$$\left(\mathbf{K}_E + \lambda\hat{\mathbf{K}}_G\right)\mathbf{U} = \mathbf{F}. \tag{4.21}$$

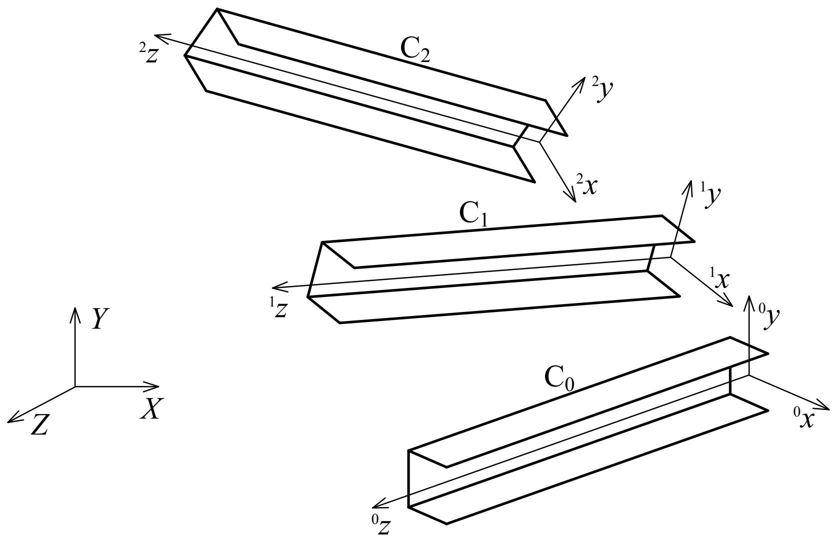
Kad je promatrani sustav savršen, odnosno ukoliko se vrijednost vanjskog opterećenja pri gubitku stabilnosti ne mijenja, inkrement optrećenja konstrukcije **F** jednak je nuli, pa jednadžba (4.21) postaje:

$$\left(\mathbf{K}_E + \lambda\hat{\mathbf{K}}_G\right)\mathbf{U} = \mathbf{0}, \tag{4.22}$$

čime se dobiva tzv. vlastitu ili svojstvenu zadaću stabilnosti [51], a čijim se rješavanjem dobivaju vlastite vrijednosti $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, koje imaju značenje kritičnog opterećenja kod kojeg konstrukcija gubi stabilnost. Svakoj vrijednosti kritičnog opterećenja pripada vlastiti vektor **U** [52] koji u ovom slučaju predstavlja samo formu gubitka stabilnosti. Od praktičnog značaja je samo najniža vlastita vrijednost, odnosno samo njoj odgovarajuća prva kritična sila izvijanja. Promatranje problema stabilnosti na ovakav način, kao problema vlastitih vrijednosti, naziva se linearnom analizom stabilnosti ili lineariziranom zadaćom stabilnosti [48,53].

4.3. Nelinearna analiza

Na sl. 4.2. prikazane su tri konfiguracije tankostjenog konačnog elementa tijekom procesa deformacije. Početna, nedeformirana konfiguracija označena je sa C_0, zadnja poznata deformirana konfiguracija sa C_1, a trenutna nepoznata konfiguracija sa C_2.



sl. 4.2. *Inkrementalni proces deformacije*

U ovom radu koristi se Eulerova formulacija ravnotežnih jednadžbi, odnosno sile i pomaci u ravnotežnim jednadžbama se definiraju preko trenutne nepoznate konfiguracije C_2.

Osi X, Y i Z su fiksne i predstavljaju globalni koordinatni sistem dok osi ${}^i x$, ${}^i y$ i ${}^i z$ lokalnog ili Eulerovog koordinatnog sistema prate konačni element tijekom deformacije. Na taj način izolirane su deformacije uzrokovane naprezanjem od deformacija koje su posljedica pomaka konstrukcije kao krutog tijela.

4.3.1. Tenzor deformacije

Tenzor deformacije, zbog pretpostavke da je $\varepsilon_{zn} = 0$, ima samo dvije komponente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_{zs} \end{Bmatrix}. \tag{4.23}$$

Eulerova formulacija je u načelu linearna na nivou lokalnog koordinatnog sustava konačnog elementa. Geometrijska nelinearnost je uključena preko transformacija komponenata pomaka iz lokalnog u globalni koordinatni sustav pa je nelinearni dio tenzora deformacije moguće zanemariti. U obzir je uzeta jedino komponenta:

$$\eta_z = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{4.24}$$

radi uključivanja Wagnerovog efekta koji uzrokuje torzijsko izvijanje nosača. Iz izraza (3.1) i (3.3) dobivaju se komponente tenzora deformacije:

$$\varepsilon_z = \frac{dw_o}{dz} - y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz} - \omega\frac{d^2\varphi_z}{dz^2} + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{d\varphi_z}{dz^2}\right)^2, \tag{4.25}$$

$$\varepsilon_{zs} = 2n\frac{d\varphi_z}{dz}. \tag{4.26}$$

Virtualni tenzor deformacije se može izraziti kao:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}_\varepsilon \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{4.27}$$

gdje je:

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} = \left\{ \frac{d\delta w_o}{dz} \quad \frac{d\delta\varphi_x}{dz} \quad \frac{d\delta\varphi_y}{dz} \quad \frac{d^2\delta\varphi_z}{dz^2} \quad \frac{d\delta\varphi_z}{dz}\cdot\frac{d\varphi_z}{dz} \quad \frac{d\delta\varphi_z}{dz} \right\}, \tag{4.28}$$

$$\mathbf{x}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & -y & -x & -\omega & \left(x^2+y^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

4.3.2. Tenzor naprezanja

Tenzor naprezanja ima dvije komponente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \end{Bmatrix}. \tag{4.30}$$

Rezultanta unutarnjih sila može se rastaviti na šest komponenti:

$$F_z = \int_A \sigma_z \, dA \,, \tag{4.31}$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y \, dA, \tag{4.32}$$

$$M_y = -\int_A \sigma_z x \, dA, \tag{4.33}$$

$$M_z = \int_A \tau_{zs} n \, dA, \tag{4.34}$$

$$M_{\omega} = \int_{A} \sigma_z \omega dA, \tag{4.35}$$

$$T_{\sigma} = \int_{A} \sigma_z \left(x^2 + y^2\right) dA. \tag{4.36}$$

Vektor unutarnjih sila:

$$\left(\mathbf{f}_{\sigma}\right)^{\mathrm{T}} = \left\{F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_{\omega} \quad T_{\sigma} \quad M_z\right\}, \tag{4.37}$$

se može napisati u obliku:

$$\left(\mathbf{f}_{\sigma}\right)^{\mathrm{T}} = \int_{\mathrm{A}} \mathbf{x}_{\sigma} \boldsymbol{\sigma} dA, \tag{4.38}$$

gdje je:

$$\left(\mathbf{x}_{\sigma}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & y & -x & \omega & \left(x^2 + y^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \end{bmatrix}. \tag{4.39}$$

4.3.3. Eulerov gredni konačni element

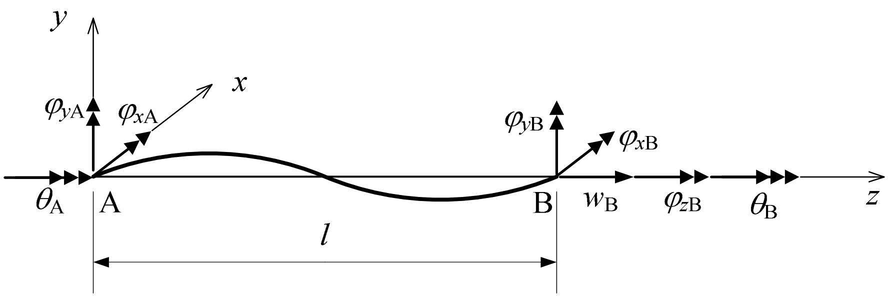
Na sl. 3.4 prikazan je gredni konačni element definiran u lokalnom Eulerovom koordinatnom sustavu. Os z prolazi kroz težišta čvornih presjeka. Element u lokalnom sustavu ima osam mogućih stupnjeva slobode gibanja pa se lokalni vektor pomaka čvorova elementa može napisati kao:

$$\left(\mathbf{u}^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}} = \left\{w_{\mathrm{B}}, \varphi_{\mathrm{xA}}, \varphi_{\mathrm{xB}}, \varphi_{\mathrm{yA}}, \varphi_{\mathrm{yB}}, \varphi_{\mathrm{zB}}, \theta_{\mathrm{A}}, \theta_{\mathrm{B}}\right\}, \tag{4.40}$$

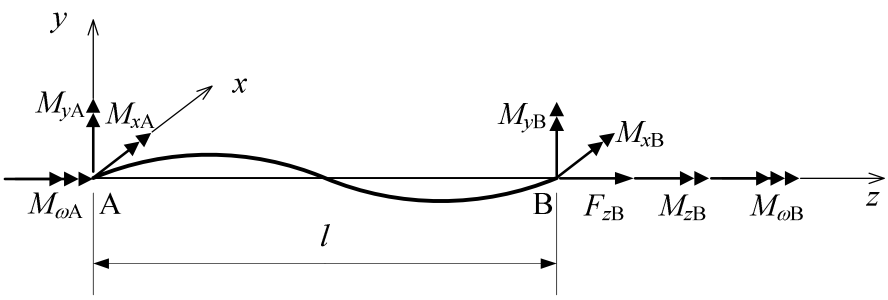
a lokalni vektor čvornih sila kao:

$$\left(\mathbf{f}^{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}} = \left\{F_{\mathrm{zB}}, M_{\mathrm{xA}}, M_{\mathrm{xB}}, M_{\mathrm{yA}}, M_{\mathrm{yB}}, M_{\mathrm{zB}}, M_{\omega\mathrm{A}}, M_{\omega\mathrm{B}}\right\}. \tag{4.41}$$

Indeks e na oba vektora označava e-ti konačni element, a indeksi A i B označavaju čvorove elementa.



a)



b)

sl. 4.3. *Gredni konačni element u Eulerovom koordinatnom sustavu: a) komponente čvornih pomaka; b) komponente čvornih sila*

Primjenom principa virtualnih radova moguće je dobiti ravnotežnu jednadžbu:

$$\int_0^l \delta\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}_\sigma dz = \left(\delta\mathbf{u}^e\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^e, \tag{4.42}$$

gdje lijeva strana predstavlja virtualni rad unutarnjih sila iz izraza (4.37), a desna strana predstavlja virtualni rad vanjskih (čvornih) sila iz izraza (4.41).

Komponente pomaka još se mogu napisati kao:

$$w_0 = \mathbf{N}_w w_{\mathrm{B}}, \quad u_0 = \mathbf{N}_u \begin{Bmatrix} \varphi_{\mathrm{yA}} \\ \varphi_{\mathrm{yB}} \end{Bmatrix}, \quad v_0 = \mathbf{N}_v \begin{Bmatrix} \varphi_{\mathrm{xA}} \\ \varphi_{\mathrm{xB}} \end{Bmatrix}, \quad \varphi_z = \mathbf{N}_\varphi \begin{Bmatrix} \theta_{\mathrm{A}} \\ \theta_{\mathrm{B}} \\ \varphi_{\mathrm{zB}} \end{Bmatrix}, \tag{4.43}$$

gdje je $\mathbf{N}_w$ linearna interpolacija oblika:

$$\mathbf{N}_{\mathrm{w}} = \left[N_{\mathrm{w}}\right] = \left[\frac{z}{l}\right], \tag{4.44}$$

dok su $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v$ i $\mathbf{N}_\varphi$ kubične interpolacije oblika:

$$\mathbf{N}_{\mathrm{u}} = \left[N_{\mathrm{u}1} \quad N_{\mathrm{u}2} \right] = \left[z - \frac{2z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \quad -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \right], \tag{4.45}$$

$$\mathbf{N}_{\mathrm{v}} = \left[N_{\mathrm{v}1} \quad N_{\mathrm{v}2} \right] = \left[-z + \frac{2z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} \quad \frac{z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} \right], \tag{4.46}$$

$$\mathbf{N}_{\varphi} = \left[N_{\varphi 1} \quad N_{\varphi 2} \quad N_{\varphi 3} \right] = \left[\frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3} \quad z - \frac{2z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \quad -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \right]. \tag{4.47}$$

Komponente vektora iz izraza (4.28) sada se mogu napisati kao:

$$\frac{d\delta w_o}{dz} = \frac{d\mathbf{N}_w}{dz} \delta w_{\mathrm{B}}, \tag{4.48}$$

$$\frac{d\delta\varphi_x}{dz} = -\frac{d^2\delta v_0}{dz^2} = -\frac{d^2\mathbf{N}_v}{dz} \begin{Bmatrix} \delta\varphi_{\mathrm{xA}} \\ \delta\varphi_{\mathrm{xB}} \end{Bmatrix}, \tag{4.49}$$

$$\frac{d\delta\varphi_y}{dz} = \frac{d^2\delta u_0}{dz^2} = \frac{d^2\mathbf{N}_u}{dz} \begin{Bmatrix} \delta\varphi_{\mathrm{yA}} \\ \delta\varphi_{\mathrm{yB}} \end{Bmatrix}, \tag{4.50}$$

$$\frac{d^2\delta\varphi_z}{dz^2} = \frac{d^2\mathbf{N}_\varphi}{dz^2} \begin{Bmatrix} \delta\varphi_{\mathrm{zB}} \\ \delta\theta_{\mathrm{A}} \\ \delta\theta_{\mathrm{B}} \end{Bmatrix}, \tag{4.51}$$

$$\frac{d\delta\varphi_z}{dz} = \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} \begin{Bmatrix} \delta\varphi_{\mathrm{zB}} \\ \delta\theta_{\mathrm{A}} \\ \delta\theta_{\mathrm{B}} \end{Bmatrix}, \tag{4.52}$$

$$\frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{d\mathbf{N}_\varphi}{dz} \begin{Bmatrix} \delta\varphi_{\mathrm{zB}} \\ \delta\theta_{\mathrm{A}} \\ \delta\theta_{\mathrm{B}} \end{Bmatrix}, \tag{4.53}$$

pa se virtualni tenzor deformacija može napisati u obliku:

$$\delta\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{B}}\delta\mathbf{u}^e, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}} + \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{u}^e\right), \tag{4.54}$$

gdje $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}$ i $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{NL}}$ označavaju matrice dimenzija 6x8 čiji članovi različiti od nule iznose:

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}\left(1,1\right) = \frac{1}{l}, \tag{4.55}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}\left(2,2\right) = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}\left(3,4\right) = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}\left(4,7\right) = -\frac{4}{l} + \frac{6z}{l^2}, \tag{4.56}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}(2,3)=\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}(3,5)=\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}(4,8)=-\frac{2}{l}+\frac{6z}{l^2}, \tag{4.57}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}(4,6)=\frac{6}{l^2}-\frac{12z}{l^3}, \tag{4.58}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}(6,6)=\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}, \tag{4.59}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}(6,7)=1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}, \tag{4.60}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}(6,8)=-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}, \tag{4.61}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{NL}}(6,6)=\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)^2\varphi_{z\mathrm{B}}+\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)\theta_{\mathrm{A}}+\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)\theta_{\mathrm{B}}, \tag{4.62}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{NL}}(6,7)=\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\varphi_{z\mathrm{B}}+\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)^2\theta_{\mathrm{A}}+\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\theta_{\mathrm{B}}, \tag{4.63}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{NL}}(6,8)=\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\varphi_{z\mathrm{B}}+\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\theta_{\mathrm{A}}+\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)^2\theta_{\mathrm{B}}. \tag{4.64}$$

Može se primijetiti da je $\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{NL}}$ funkcija torzijskog kuta $\varphi_{z\mathrm{B}}$ te vitoperenja $\theta_{\mathrm{A}}\ i\ \theta_{\mathrm{B}}$. Uvrštavanjem izraza (4.38) i (4.54) u izraz (4.42) ravnotežna jednadžba poprima oblik:

$$\int_0^l\int_A \tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_\sigma \boldsymbol{\sigma} dAdz=\mathbf{f}^e. \tag{4.65}$$

4.3.4. Inkrementalni opis

U svrhu rješavanja nelinearnog problema, upotrijebit će se inkrementalni oblik jednadžbe (4.65). Konačni gredni element se deformira iz prethodne ravnotežne konfiguracije definirane sa $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{f}^{\mathrm{e}}$, $\varphi_{z\mathrm{B}}$, $\theta_{z\mathrm{A}}$, i $\theta_{z\mathrm{B}}$ u novu ravnotežnu konfiguraciju definiranu sa $\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{f}^{\mathrm{e}}+\Delta\mathbf{f}^{\mathrm{e}}$, $\varphi_{z\mathrm{B}}+\Delta\varphi_{z\mathrm{B}}$, $\theta_{z\mathrm{A}}+\Delta\theta_{z\mathrm{A}}$, i $\theta_{z\mathrm{B}}+\Delta\theta_{z\mathrm{B}}$. Nakon prve varijacije jednadžbe (4.65) dobiva se sljedeća inkrementalna jednadžba:

$$\int_0^l\int_A \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}\mathbf{x}_\sigma^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\sigma} dAdz+\int_0^l\int_A a\sigma_z dAdz\Delta\varphi_{z\mathrm{B}}+\int_0^l\int_A b\sigma_z dAdz\Delta\theta_{\mathrm{A}}+\int_0^l\int_A c\sigma_z dAdz\Delta\theta_{\mathrm{B}}=\Delta\mathbf{f}^e, \tag{4.66}$$

pri čemu je:

$$a=\left(x^2+y^2\right)\left[\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)^2+\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)+\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\right], \tag{4.67}$$

$$b=\left(x^2+y^2\right)\left[\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)+\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)^2+\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\right], \tag{4.68}$$

$$c=\left(x^2+y^2\right)\left[-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\left(\frac{6z}{l^2}-\frac{6z^2}{l^3}\right)+\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)\left(1-\frac{4z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)+\left(-\frac{2z}{l}+\frac{3z^2}{l^2}\right)^2\right]. \tag{4.69}$$

Inkrementalni tenzor naprezanja $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ se može izraziti preko inkrementalnog tenzora deformacije $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ kao:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{Q}_{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{4.70}$$

gdje $\mathbf{Q}_{\mathrm{T}}$ označava transformirani reducirani tenzor elastičnosti iz izraza (2.80):

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{T}}=\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}^{*} & \bar{Q}_{16}^{*}\\ \bar{Q}_{16}^{*} & \bar{Q}_{66}^{*}\end{bmatrix}. \tag{4.71}$$

Kombiniranjem izraza (4.27), (4.54) i (4.70) dobiva se:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{Q}_{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{\varepsilon}\tilde{\mathbf{B}}\Delta\mathbf{u}^{e}, \tag{4.72}$$

gdje $\Delta\mathbf{u}^{\mathrm{e}}$ označava vektor inkrementalnih čvornih pomaka. Prema tome, naprezanje u konačnom elementu nove konfiguracije iznosi:

$${}^{2}\boldsymbol{\sigma}={}^{1}\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma}, \tag{4.73}$$

gdje lijevi gornji indeks 2 označava novu konfiguraciju, a indeks 1 zadnju poznatu konfiguraciju. Uvrštavanjem izraza (4.66) u izraz (4.72) i preraspodjelom integrala vezanih uz Wagnerov efekt, inkrementalna ravnotežna jednadžba se može napisati u obliku:

$$\mathbf{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}\Delta\mathbf{u}^{e}=\Delta\mathbf{f}^{e}, \tag{4.74}$$

gdje $\mathbf{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}$ označava lokalnu tangentnu matricu krutosti e-tog elementa:

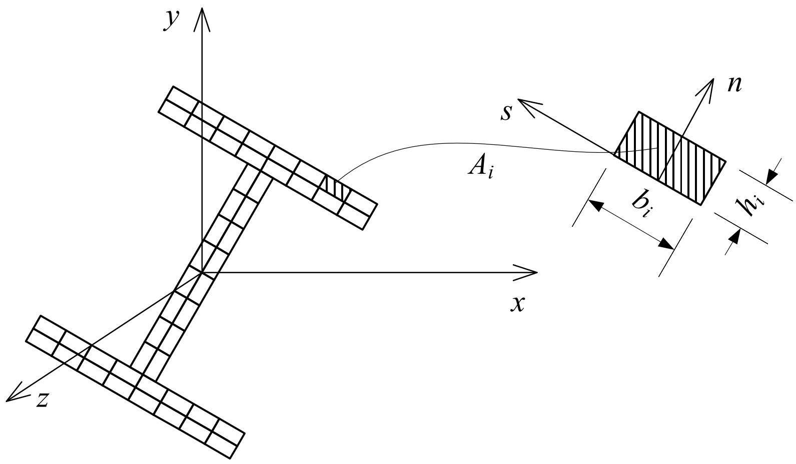
$$\mathbf{k}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{e}}=\int_0^l\int_A\tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}\mathbf{x}_{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{\varepsilon}\tilde{\mathbf{B}}\,dAdz+\int_0^l\int_A\sigma_z\mathbf{x}_G\,dAdz, \tag{4.75}$$

dok je $\mathbf{x}_{\mathrm{G}}$ matrica dimenzija 8x8 čija su samo tri člana različita od nule:

$$\mathbf{x}_G(6,6)=a,\quad \mathbf{x}_G(7,7)=b,\quad \mathbf{x}_G(8,8)=c. \tag{4.76}$$

Integracija izraza (4.75) po uzdužnoj osi elementa se provodi za tri Gaussove točke podjelom poprečnog presjeka u konačni broj integracijskih površina. Da bi se izračunala matrica $\mathbf{x}_\varepsilon$, vrijednost vitoperenja ω mora biti poznata. Vitoperenje se izračunava na isti način kao i za izotropne tankostjene poprečne presjeke.

Da bi se odredile komponente unutarnjih sila u proizvoljnom presjeku potrebno je poznavati stanje naprezanja u svakoj točki poprečnog presjeka koji je zato diskretiziran konačnim brojem integracijskih površina (sl. 4.4.).



sl. 4.4. *Diskretizacija poprečnog presjeka integracijskim površinama*

U težištu svake integracijske površine moguće je odrediti stanje deformacije, odnosno stanje naprezanja pa se sumiranjem po svim površinama dobivaju vrijednosti komponenata unutarnjih sila u proizvoljnom poprečnom presjeku grede:

$$F_{z(z)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{z(z)i} \Delta A_i \,, \tag{4.77}$$

$$M_{x(z)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{z(z)i} y_i \Delta A_i \,, \tag{4.78}$$

$$M_{y(z)} = -\sum_{i=1}^{m} \sigma_{z(z)i} x_i \Delta A_i \,, \tag{4.79}$$

$$M_{z(z)} = \sum_{i=1}^{m} \tau_{zs(z)i} n_i \Delta A_i \,, \tag{4.80}$$

$$M_{\omega(z)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{z(z)i} \omega_i \Delta A_i \,, \tag{4.81}$$

$$T_{\sigma(z)} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_{z(z)i} \left(x_i^2 + y_i^2 \right) \Delta A_i \,, \tag{4.82}$$

gdje je *m* ukupan broj integracijskih površina, a indeks (*z*) označava proizvoljni poprečni presjek na udaljenosti *z* od čvora A konačnog elementa.

4.3.1. Transformacija u globalni koordinatni sustav

Da bi se utvrdili čvorni pomaci konstrukcije pod opterećenjem, neophodno je transformirati jednadžbu (4.74) iz lokalnog u globalni koordinatni sustav. Nelinearna transformacijska procedura [54] koja uzima u obzir efekte velikih rotacija je usvojena u ovom radu;

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathrm{T}}^{e} = \left(\mathbf{t}_1^{e}\right) \mathbf{k}_{\mathrm{T}}^{e} \mathbf{t}_1^{e} + \mathbf{t}_2^{e} \mathbf{f}^{e}, \quad \Delta \mathbf{u}^{e} = \mathbf{t}_1^{e} \Delta \bar{\mathbf{u}}^{e}, \quad \Delta \mathbf{f}^{e} = \mathbf{t}_1^{e} \Delta \bar{\mathbf{f}}^{e}, \tag{4.83}$$

gdje transformacijska matrica $\mathbf{t}_1^e$ dimenzija 14x8 sadrži derivacije lokalnih pomaka po globalnim pomacima, a transformacijska matrica $\mathbf{t}_2^e$ dimenzija 14x14x8 sadrži odgovarajuće druge derivacije i odražava efekte promjene u geometriji konstrukcije zbog globalnih sila.

Inkrementalne ravnotežne jednadžbe cijele konstrukcije dobivaju se standardnom procedurom sastavljanja[55]:

$$\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{e} \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{P}, \quad \mathbf{K}_{\mathrm{T}} = \sum_{e} \mathbf{k}_{\mathrm{T}}^{e}, \quad \Delta \mathbf{P} = {}^{2}\mathbf{P} - {}^{1}\mathbf{P}, \tag{4.84}$$

gdje je $\mathbf{K}_{\mathrm{T}}$ tangencijalna matrica krutosti konstrukcije, $\Delta\mathbf{U}$ i $\Delta\mathbf{P}$ su odgovarajući inkrementalni vektori pomaka i sila, a ${}^{2}\mathbf{P}$ i ${}^{1}\mathbf{P}$ označavaju vektore vanjskih opterećenja na Konfiguraciju C_2, odnosno C_1.

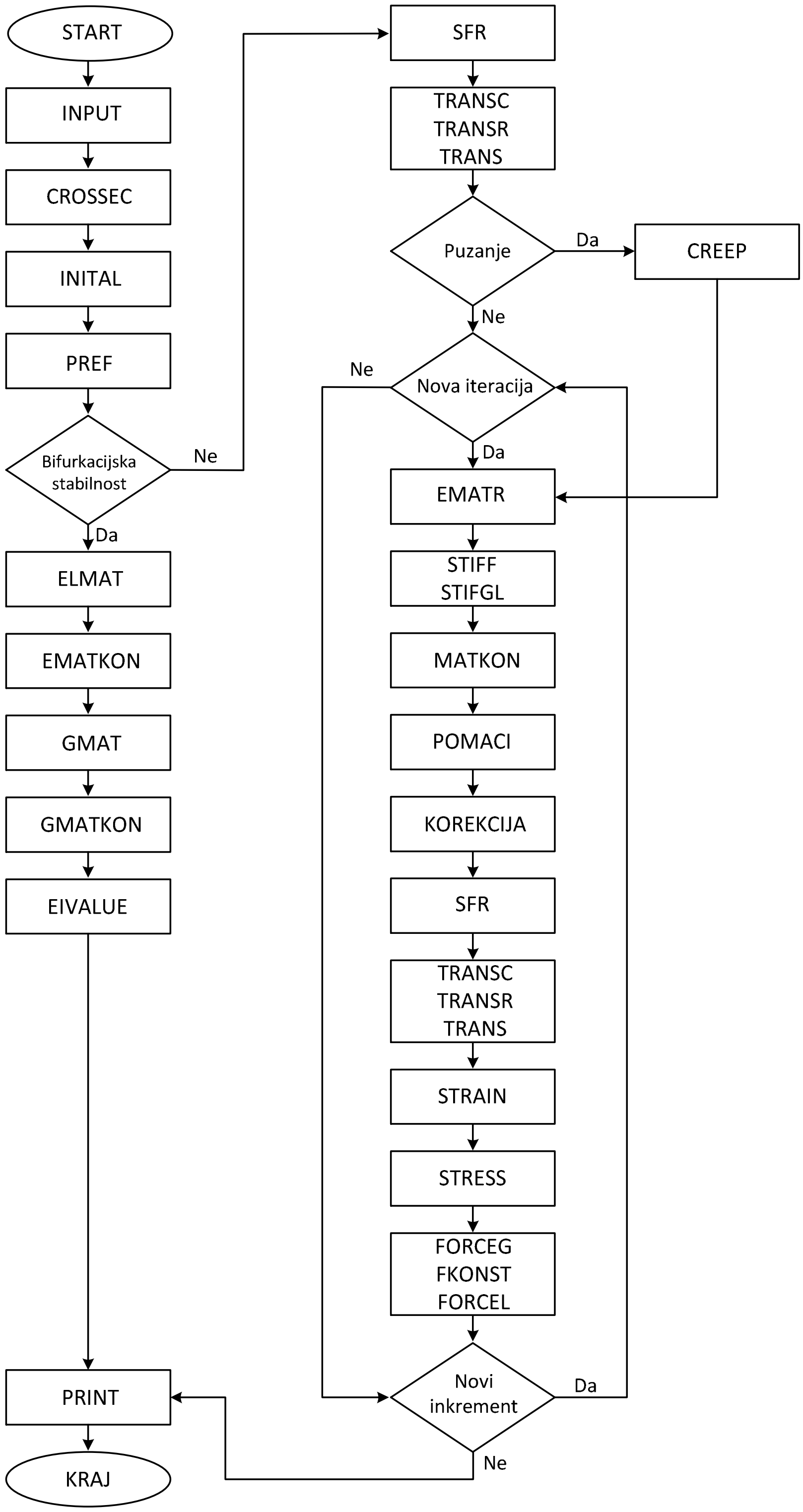
5. Računalni program Eulam

5.1. Opis programa

U programskom paketu *Fortran Power Station* izrađen je računalni program *Eulam* koji se temelji na numeričkom algoritmu iznesenom u prethodnom poglavlju. Program može vršiti linearnu i nelinearnu analizu konstrukcija sastavljenih od tankostjenih laminatnih greda.

Linearna analiza kao rezultat daje vlastite vrijednosti kritičnog opterećenja pri kojem konstrukcija gubi stabilnost i pripadni vlastiti vektor koji ima značenje deformacijskog oblika izvijene konstrukcije. Od praktičnog značenja je samo prva vlastita vrijednost i pripadni vektor.

Nelinearnom analizom dobiva se odziv konstrukcije tijekom cijelog procesa deformacije. To se postiže inkrementalno-iterativnom procedurom. Uvođenje opterećenja je podijeljeno u određeni broj inkremenata unutar kojih se ponavljaju iteracije do postizanja uvjeta konvergencije. Pritom je potrebno uvesti i poremećajno opterećenje radi simuliranja nesavršenosti u konstrukciji.



sl. 5.1. *Shematski prikaz tijeka programa Eulam*

5.2. Opis potprograma

Potprogram INPUT učitava ulaznu datoteku u kojoj su definirani: vrsta analize, geometrija konstrukcije, mreža konačnih elemenata, rubni uvjeti, vanjsko opterećenje, materijalne značajke i kontrolne varijable proračuna.

Potprogram CROSSEC izračunava komponente transformiranog reduciranog tenzora elastičnosti. Tu se također izračunavaju vrijednosti funkcije vitoperenja u točkama poprečnog presjeka. Potprogram INITAL formira početne vrijednosti pojedinih matrica i vektora kao i ostalih parametara bitnih za proračun. U potprogram PREF se iz ulaznih vrijednosti vanjskog opterećenja formira vektor referentnog opterećenja.

U slučaju bifurkacijske stabilnosti potprogrami ELMAT i GMAT formiraju elastične, odnosno geometrijske matrice krutosti svih konačnih elemenata, transformiraju ih u globalni koordinatni sustav te ih nakon toga potprogrami EMATKON i GMATKON slažu u elastičnu, odnosno geometrijsku matricu krutosti konstrukcije. Potprogram EIVALUE kondenzira elastičnu i geometrijsku matricu krutosti konstrukcije, formira problem vlastitih vrijednosti i računa vlastite vrijednosti i vlastite vektore.

U slučaju puzanja Potprogram CREEP učitava komponente transformiranog reduciranog tenzora elastičnosti koje se moraju prethodno izračunati u računalnom programu Matlab.

U Potprogramu SFR izračunavaju se interpolacijske funkcije i njihove derivacije za Gaussove integracijske točke grednog konačnog elementa. Potprogrami TRANSC, TRANSR, TRANS formiraju transformacijske matrice za prebacivanje vrijednosti matrica krutosti, vektora opterećenja i komponenata pomaka iz lokalnog u globalni koordinatni sustav, odnosno iz Gaussovih točaka u čvorove konačnog elementa.

Potprogram EMATR preuzima komponente transformiranog reduciranog tenzora elastičnosti iz potprograma CROSSEC ili CREEP ovisno o tome da li se radi o elastičnoj ili viskoelastičnoj analizi. Potprogram STIFF formira matricu krutosti u lokalnom koordinatnom sustavu, STIFFGL transformira matricu krutosti u globalni koordinatni sustav, a MATKON formira matricu krutosti cijele konstrukcije.

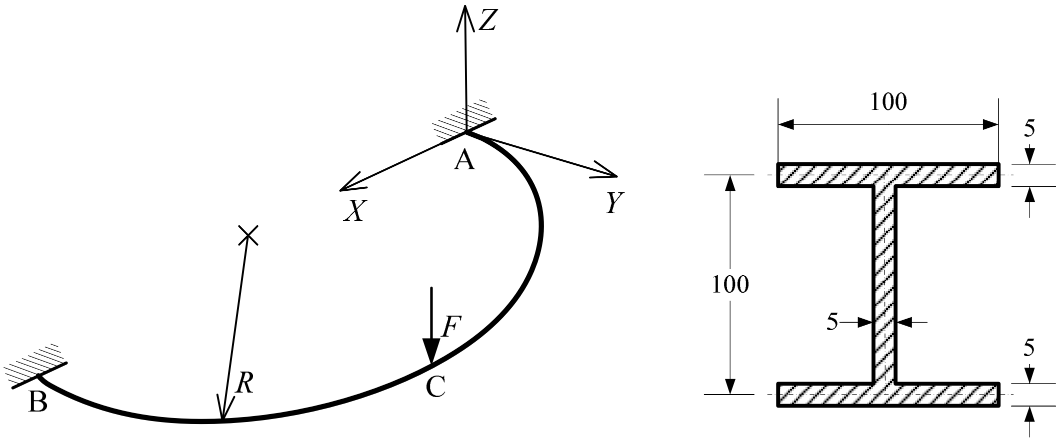
U potprogramu POMACI određuje se ukupni vektor inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije. Potprogram KOREKCIJA korigira koordinate čvorova konstrukcije i položaj referentnih osi čvorova. Potprogram STRAIN računa vrijednosti deformacija, a STRESS vrijednosti naprezanja u integracijskim površinama poprečnog presjeka za Gaussove točke integracije konačnih elemenata. Potprogram FORCEL formira vektor opterećenja u lokalnom, a FORCEG u globalnom koordinatnom sustavu. Potom FKONST formira vektor globalnog opterećenja cijele konstrukcije. Na kraju potprogram PRINT ispisuje rezultate.

5.3. Primjeri

U svrhu valorizacije računalnog programa Eulam analizirano je 12 primjera. U prva dva primjera računaju se translacijski, odnosno rotacijski pomaci opterećenih nosača. U dva sljedeća primjera provedena je linearna, a narednih šest primjera nelinearna analiza stabilnosti. U zadnja dva primjera testirano je ponašanje u režimu puzanja pri savijanju, uvijanju i izvijanju grednih konstrukcija.

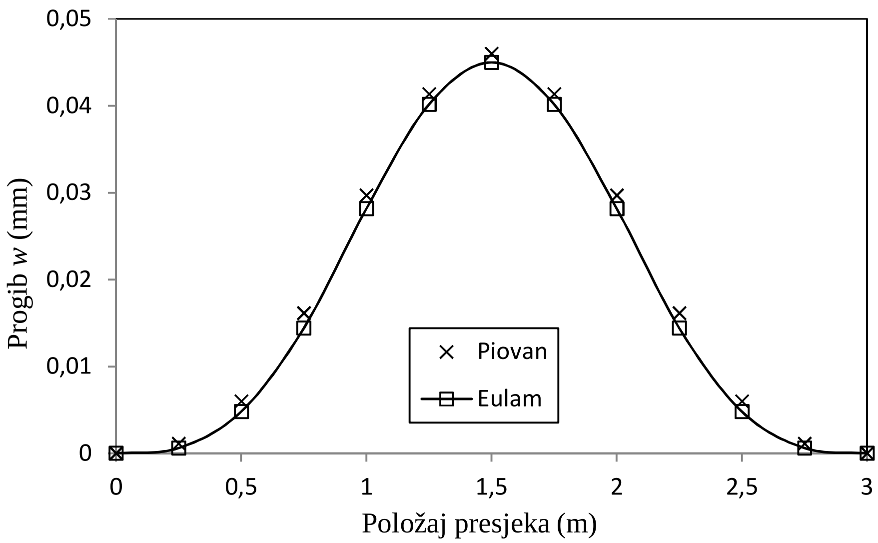
Primjer 5.3.1. *Prostorno savijanje zakrivljene grede*

Na sl. 5.2. prikazana je zakrivljena greda ukliještena na oba kraja i opterećena silom F u presjeku C na sredini grede. Poprečni presjek je I-profil sastavljen od osam laminatnih slojeva sa redoslijedom slaganja $[0/0/\text{-}45/45]_s$. Duljina grede iznosi L = 3 m, a radijus zakrivljenosti iznosi R = 2 m. Struk profila je okomit na radijus zakrivljenosti. Karakteristike materijala su: E_1 = 144 GPa, E_2 = 9,68 GPa, G_{12} =4,14 GPa, ν_{12} = 0,3. Greda je diskretizirana s 12 pravocrtnih grednih konačnih elemenata.



sl. 5.2. *Savijanje zakrivljene grede*

Na sl. 5.3. prikazani su pomaci *w* uzduž grede u negativnom smjeru osi *Z*. Rezultat je uspoređen s rezultatom Piovana i Cortineza [30].



sl. 5.3. *Progib uzduž zakrivljene grede*

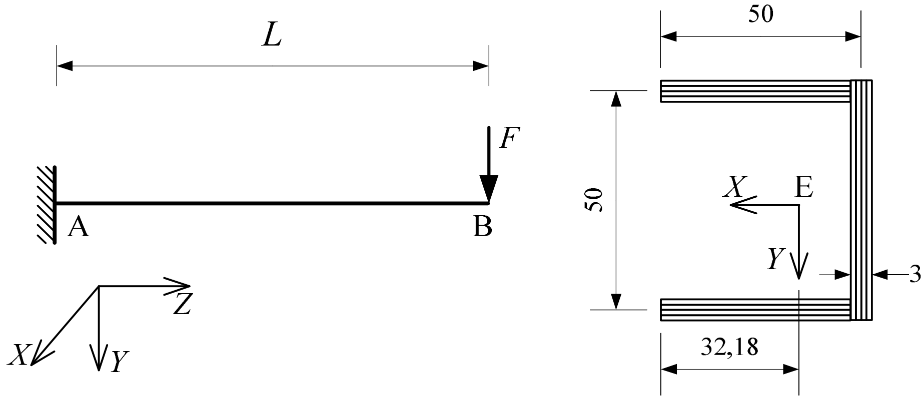
Primjer 5.3.2. *Savijanje i uvijanje konzole*

Konzola duljine L = 2 m na sl. 5.4. opterećena je poprečnom silom F_Y u elastičnom centru na slobodnom kraju. Konzola je modelirana s jednim konačnim elementom.

Poprečni presjek je U-profil i sastavljen je od četiri sloja kompozita S2-glass/epoxy s karakteristikama materijala danim u tab. 5.1.

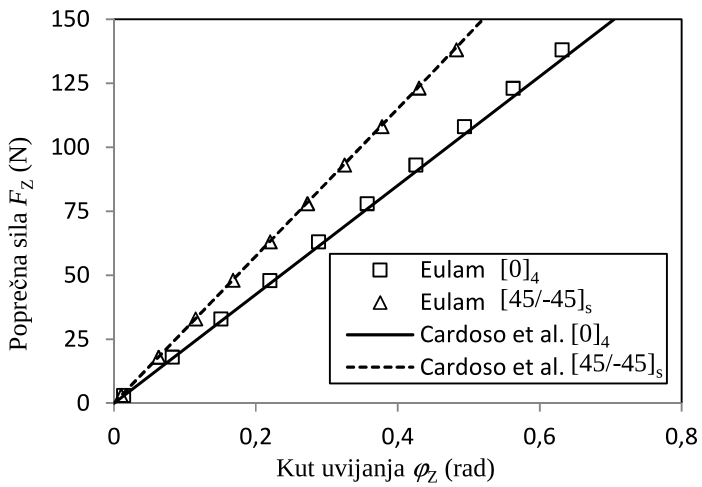
E_1 = 48,3 GPa, E_2 = 19,8 GPa, G_{12} =8,96 GPa, ν_{12} = 0,27

tab. 5.1. *Karakteristike materijala S2-glass/epoxy*



sl. 5.4. *Savijanje i uvijanje konzole*

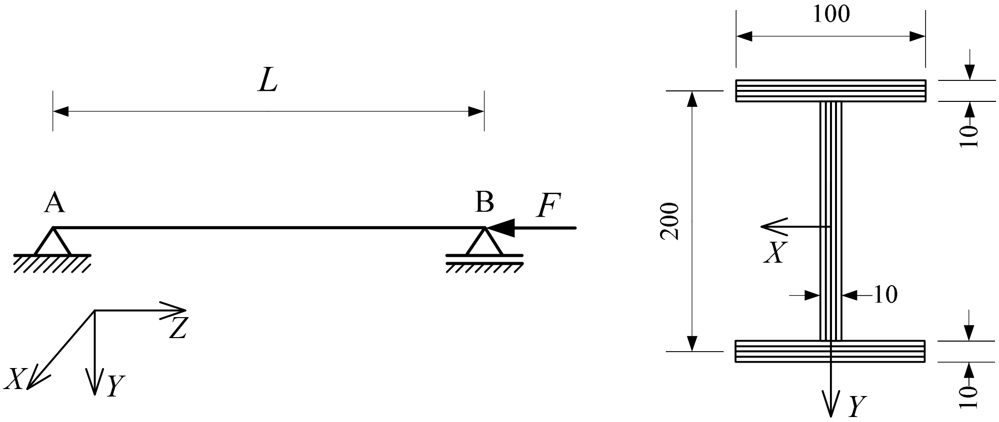
Razmatrana su dva slučaja slaganja laminatnih slojeva: $[0]_4$ i $[45/-45]_s$. Na sl. 5.5. dana je usporedba rezultata s modelom Cardosa et al. [56] koji su koristili osam grednih konačnih elemenata. Iz dijagrama je vidljivo da jednosmjerni laminat ima manju torzijsku krutost od laminata čiji su slojevi pod kutom od 45°.



sl. 5.5. *Dijagram (F_Y – φ_Z)*

Primjer 5.3.3. *Fleksijsko izvijanje grede*

Na sl. 5.6. prikazana je zglobno oslonjena greda opterećena tlačnom silom F. Greda je duljine L = 8 m i tankostjenog je poprečnog presjeka I-profila dimenzija (10 cm × 20 cm × 1 cm).

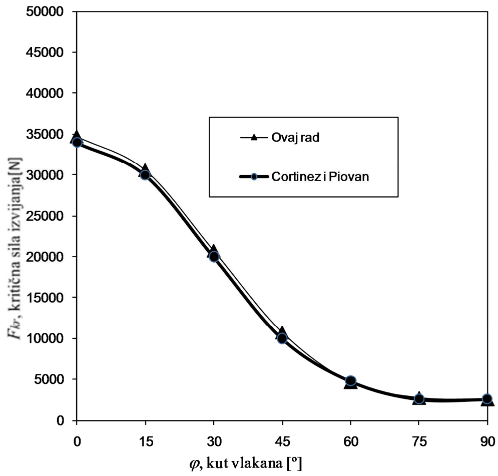


sl. 5.6. *Izvijanje proste grede*

Struk i pojasevi profila četveroslojni su laminati s rasporedom kutova vlakana $[\varphi/-\varphi]_s$. Materijalne značajke laminata dane su u tab. 5.2. Rezultati promjene kritične sile izvijanja s promjenom kuta orijentacije vlakana φ, dobiveni linearnom analizom stabilnosti, prikazani su na sl. 5.7. zajedno s rezultatima Cortineza i Piovana [57] danima za usporedbu.

E_1 = 133.4 GPa, E_2 = 8.78 GPa, G_{12} = 3.67 GPa, ν_{12} = 0.26

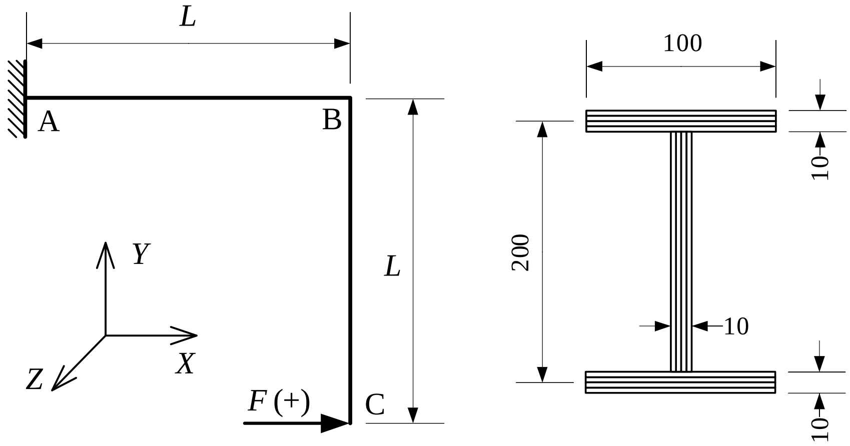
tab. 5.2. *Karakteristike materijala*



sl. 5.7. *Promjena kritične sila izvijanja s promjenom kuta orijentacije vlakana*

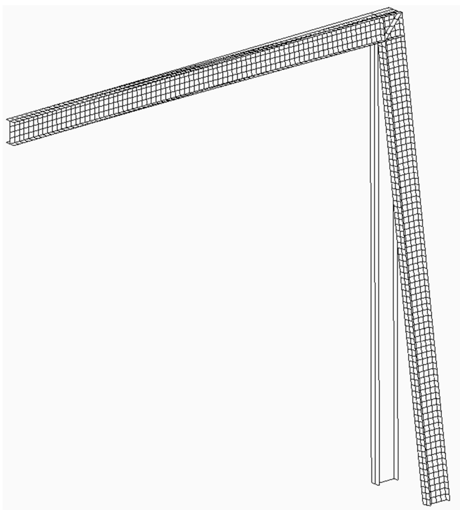
Primjer 5.3.4. *Lateralno izvijanje L-okvira*

Na sl. 5.8. prikazan je L-okvir opterećen poprečnom silom u presjeku C. Oba segmenta okvira imaju duljinu L = 4 m i poprečni presjek I-profila tako da struk leži u ravnini okvira. I struk i pojasevi izrađeni su od četveroslojnih laminata s rasporedom kutova vlakana $[\varphi/ -\varphi]_s$. Značajke materijala dane su u tab. 5.2.

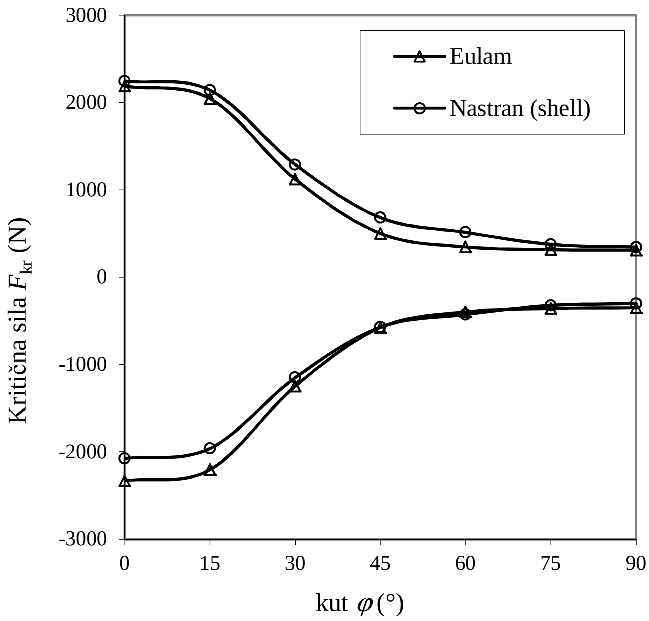


sl. 5.8. *L-okvir*

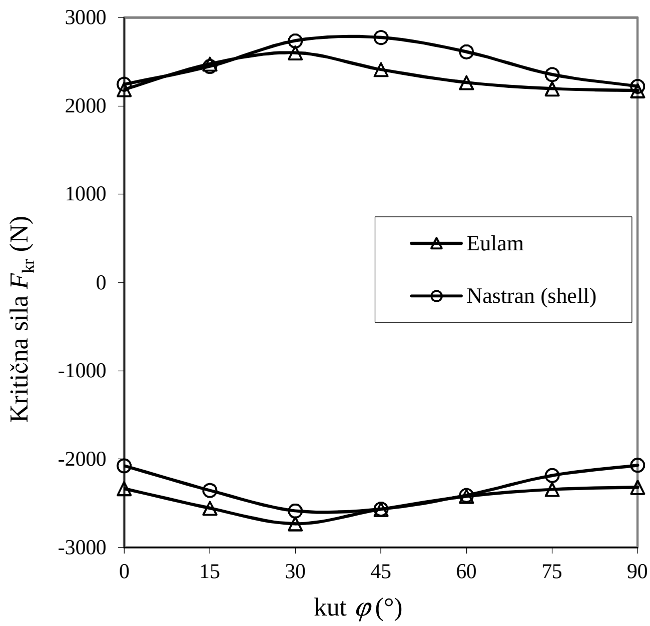
Oba segmenta okvira diskretizirana su sa četiri gredna konačna elemenata, a spoj u presjeku B smatra se idealno krutim. Razmatrana su tri slučaja. U prvom slučaju struk je sastavljen od jednosmjernih slojeva ($\varphi = 0°$), a u pojasevima kutovi vlakana variraju od 0° do 90°. U drugom slučaju pojasevi imaju jednosmjerne slojeve, a kutovi vlakana u struku variraju dok u trećem slučaju slojevi i u struku i u pojasevima variraju. Za sva tri slučaja promatrana je stabilnost okvira za pozitivan i negativan smjer sile *F*. Vrijednosti kritičnog opterećenja dane su na sl. 5.10., sl. 5.11., i sl. 5.12. i uspoređene su s rezultatima dobivenim shell modelom s programskim paketom Nastran (sl. 5.9.) pri čemu je okvir modeliran s 1304 Quad elemenata. Na sl. 5.9. vidljiv je izvijeni oblik okvira. Dobivena je zadovoljavajuća podudarnost rezultata grednog i shell modela.



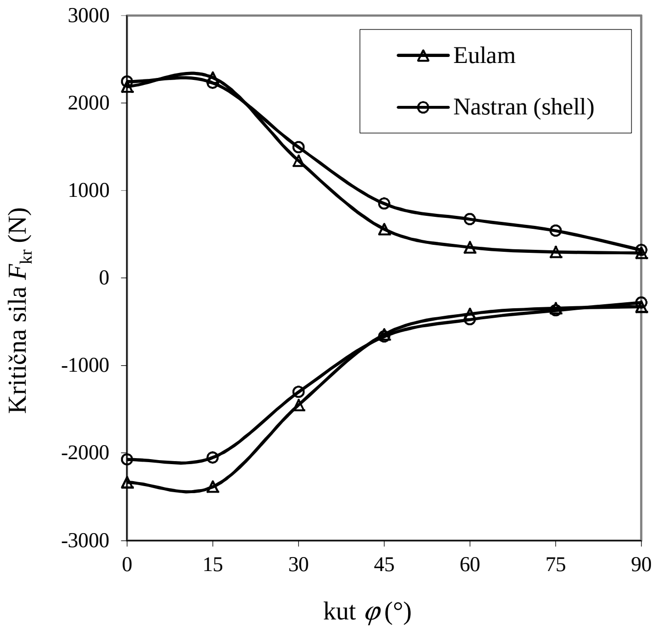
sl. 5.9. *Shell model L-okvira*



sl. 5.10. *Kritična sila u odnosu na promjenu kuta vlakana u pojasevima*



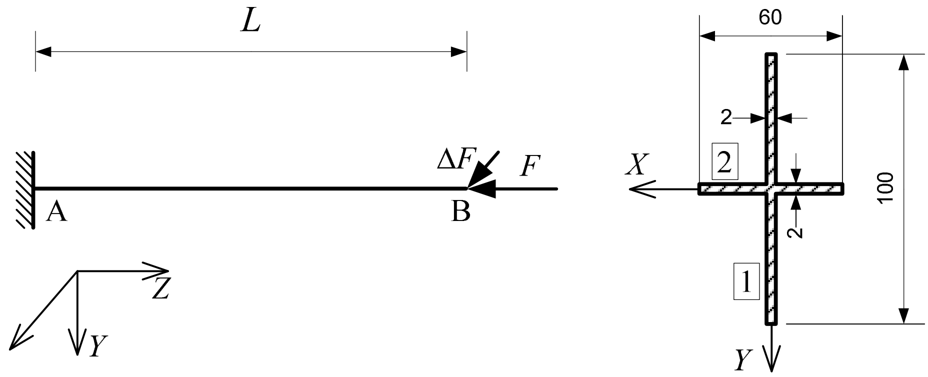
sl. 5.11. *Kritična sila u odnosu na promjenu kuta vlakana u struku*



sl. 5.12. *Kritična sila u odnosu na promjenu kuta vlakana u struku i pojasevima*

Primjer 5.3.5. *Fleksijsko izvijanje konzole križnog poprečnog presjeka*

U ovom primjeru izvršena je nelinearna analiza fleksijskog izvijanja konzole s križnim poprečnim presjekom. Dva laminata, označena brojkama 1 i 2 na sl. 5.13., tvore križni poprečni presjek. Oba laminata su sastavljena od osam kompozitnih slojeva s redoslijedom slaganja $[\varphi/-\varphi]_{2s}$ i karakteristikama materijala danim u tab. 5.3. Konzola je opterećena aksijalnom silom u težištu presjeka B i bočnom poremećajnom silom $\Delta F = 0{,}001F$ u smjeru osi X kao inicijatorom izvijanja.

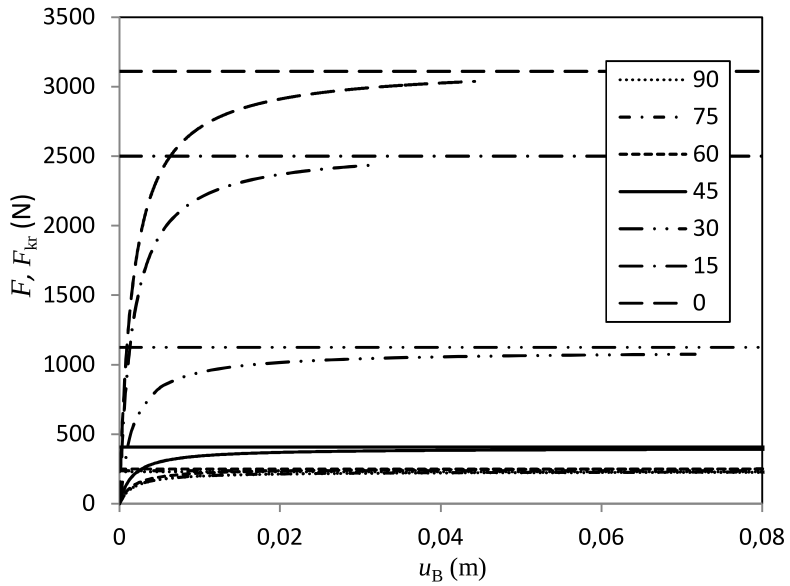


sl. 5.13. *Fleksijsko izvijanje konzole križnog poprečnog presjeka*

E_1 = 140 GPa, E_2 = 10 GPa, G_{12} = 5 GPa, ν_{12} = 0.3

tab. 5.3. *Karakteristike materijala*

Konzola je diskretizirana s četiri jednaka gredna elementa i razmatran je slučaj kada su vlakna svih slojeva laminata 1 pod kutom φ = 0° dok kutovi u laminatu 2 variraju od 0° do 90°. Na sl. 5.14. prikazan je nelinearni odziv konzole različitih kutova vlakana zajedno s rezultatima linearne analize Cardosa et al. [56] radi usporedbe.



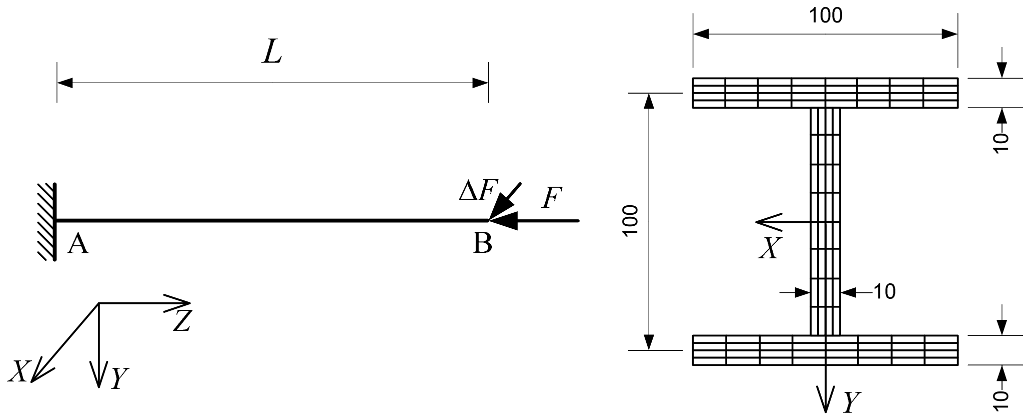
sl. 5.14. *Dijagram (F, Fkr – uB) za različite kuteve vlakana φ*

Primjer 5.3.6. *Fleksijsko izvijanje konzole I-profila*

Konzola duljine L = 2 m na sl. 5.15. opterećena je tlačnom aksijalnom silom F u presjeku B. Dodatna sila ΔF = 0,001F dodana je na kraj konzole u smjeru osi X radi iniciranja fleksijskog izvijanja. Poprečni presjek je I-profil sastavljen od četveroslojnog laminata s redoslijedom slaganja $[45/-45]_s$. Analizirani materijal je ugljik-epoxy (AS4/3501) sa značajkama prikazanim u tab. 5.4.

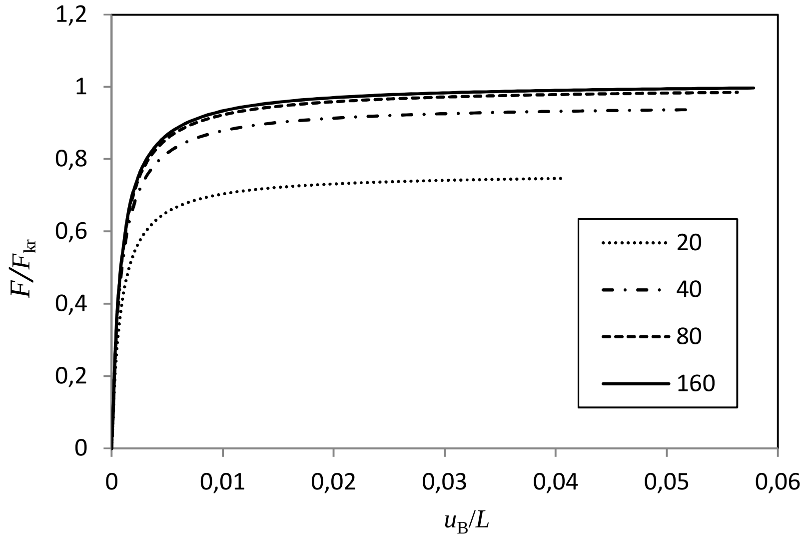
E_1 = 144 GPa, E_2 = 9.65 GPa, G_{12} = 4.14 GPa, ν_{12} = 0.26

tab. 5.4. *Značajke materijala ugljik-epoxy (AS4/3501)*

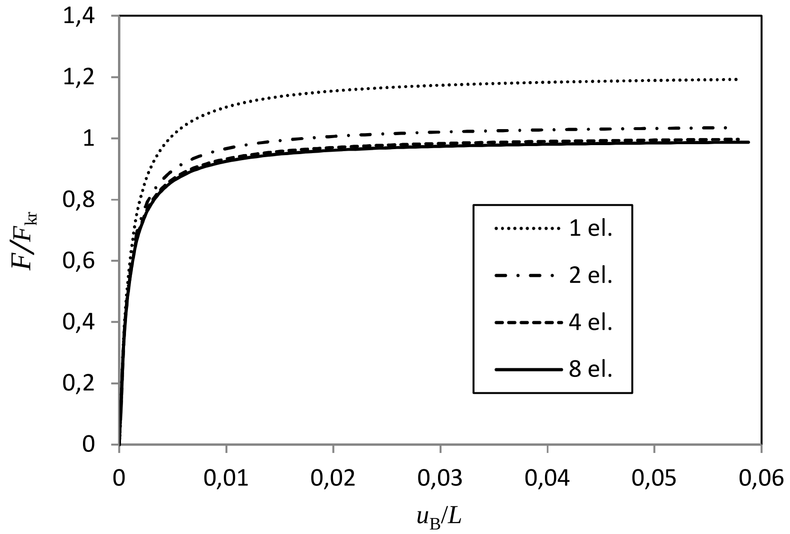


sl. 5.15. *Fleksijsko izvijanje konzole I-profila*

Provedene su analize izvijanja za dva slučaja. U prvom slučaju konzola je diskretizirana s četiri konačna elementa, a varira broj integracijskih površina. U drugom slučaju broj integracijskih površina iznosi 160, a mijenja se broj konačnih elemenata. Na sl. 5.16. i sl. 5.17. prikazan je nelinearni odziv konzole u odnosu na različiti stupanj diskretizacije poprečnog presjeka odnosno uzdužne osi konzole. Kritično opterećenje dobiveno linearnom analizom koje su objavili Cortinez i Piovan [57] iznosi 15,5 kN. Vidljiva je dobra podudarnost rezultata za 4 elementa odnosno za 80 integracijskih površina.

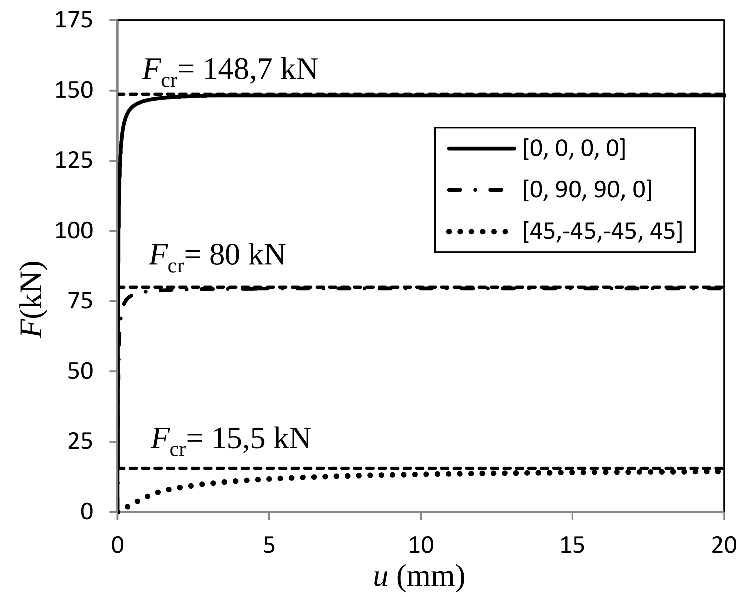


sl. 5.16. *Dijagram (F/F_{kr} – u_B/L) za četiri konačna elementa s varijacijom broja integracijskih površina*



sl. 5.17. *Dijagram (F/Fkr – uB/L) za 160 integracijskih površina s varijacijom broja konačnih elemenata*

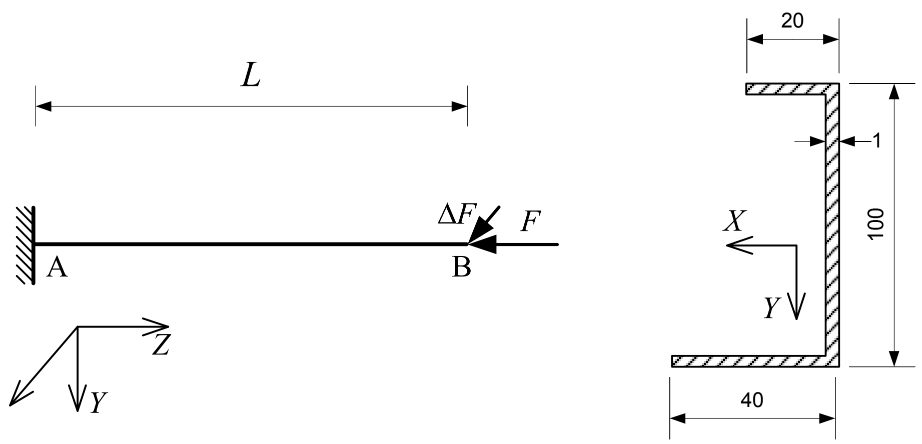
Na sl. 5.18. prikazan je nelinearni odziv konzole različitih redoslijeda slaganja slojeva laminata uz usporedbu s kritičnim silama izvijanja dobivenim linearnom analizom Cortineza i Piovana [57].



sl. 5.18. *Dijagram (F– u_B) za različite redoslijede slaganja slojeva*

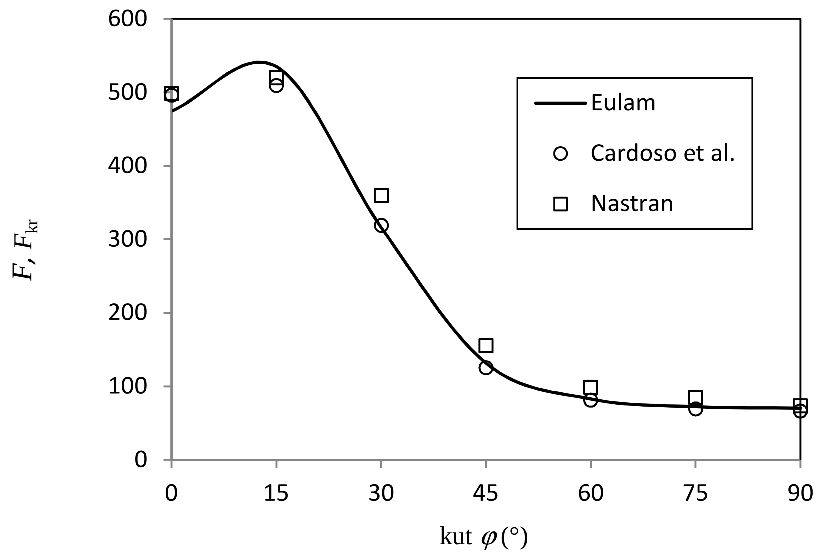
Primjer 5.3.7. *Fleksijsko-torzijsko izvijanje konzole*

Konzola nesimetričnog poprečnog presjeka duljine L = 2 m na sl. 5.19. opterećena je tlačnom aksijalnom silom F u presjeku B. Sila ΔF = 0,001F dodana je na kraj konzole u smjeru osi X radi iniciranja fleksijskog izvijanja. Poprečni presjek sastavljen je od osam slojeva laminata s redoslijedom slaganja $[\varphi/\text{-}\varphi]_{2s}$ i ukupne debljine t = 1 mm. Karakteristike materijala prikazane su u tab. 5.3.



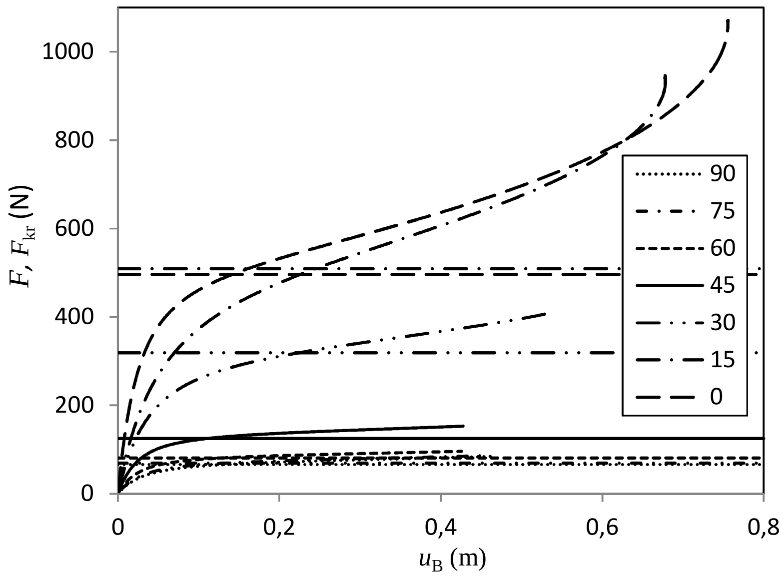
sl. 5.19. *Fleksijsko-torzijsko izvijanje konzole*

Promjena kritične sile izvijanja u odnosu na kut orijentacije vlakana φ, dobivena linearnom analizom stabilnosti sa četiri gredna elementa, prikazana je na sl. 5.20sl. 5.7. zajedno s rezultatima Cardosa et al. [56] danima za usporedbu. Cardoso et al. su koristili osam konačnih elemenata.



sl. 5.20. *Kritična sila u odnosu na promjenu kuta vlakana*

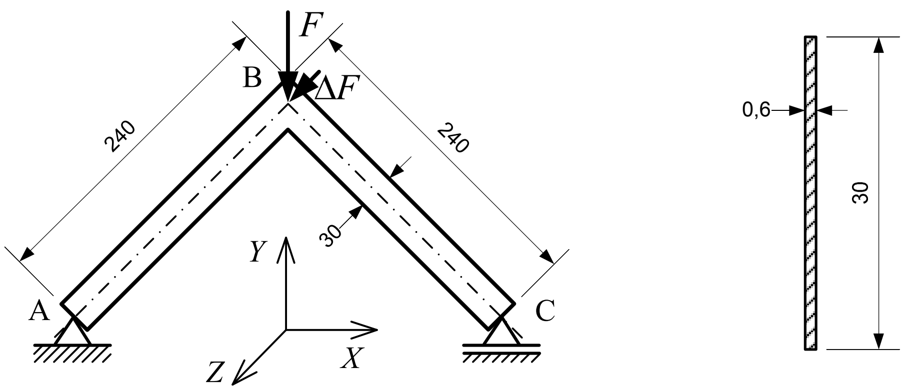
Na sl. 5.21. prikazan je nelinearni odziv konzole za različite kuteve orijentacije vlakana φ uz prikazano kritično opterećenje Cardosa et al. [56] dobiveno linearnom analizom izvijanja.



sl. 5.21. *Dijagram (F, Fkr – u_B) za različite kuteve vlakana φ*

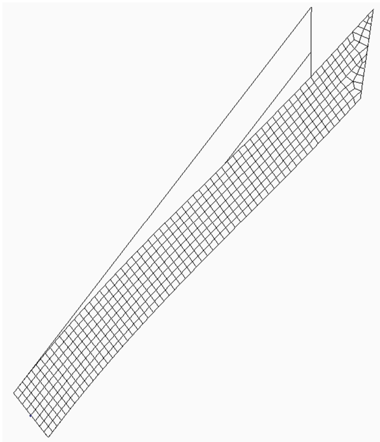
Primjer 5.3.8. *Lateralno izvijanje zglobno oslonjenog pravokutnog okvira*

Na sl. 5.22. prikazan je zglobno oslonjeni pravokutni okvir opterećen silom F u težištu presjeka B koja djeluje u negativnom smjeru osi Y. Sila $\Delta F = 0{,}001F$ dodana je također u težištu presjeka B u smjeru osi Z radi iniciranja lateralnog izvijanja. U oba su zgloba zabranjene rotacije oko X i Y osi. Poprečni je presjek oba odsječka okvira je pravokutan. Laminat je sastavljen od osam slojeva kompozitnog materijala tab. 5.3., a razmatrana su tri rasporeda slaganja slojeva: $[0_8]$, $[0/90]_{2s}$ i $[90_8]$.



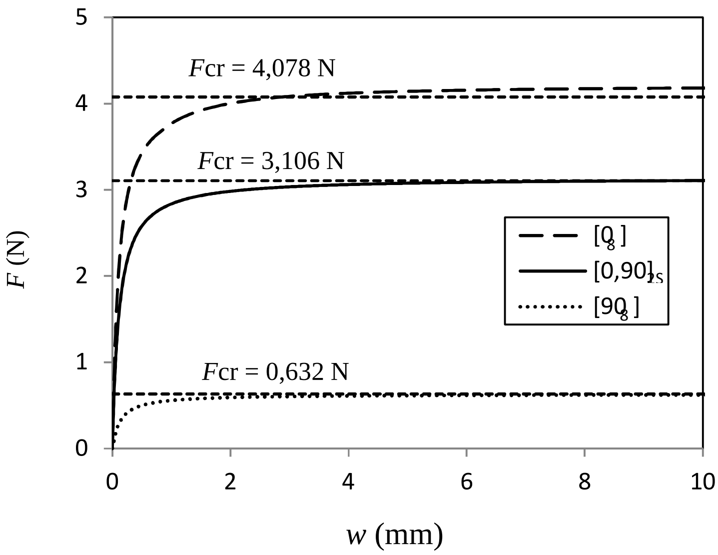
sl. 5.22. *Zglobno oslonjeni pravokutni okvir*

Linearna je analiza izvršena sa 512 shell konačnih elemenata u programskom paketu Nastran radi valorizacije rezultata. Budući da je okvir simetričan, modelirana je samo jedna polovica (sl. 5.23).



sl. 5.23. *Prvi mod izvijanja pravokutnog okvira*

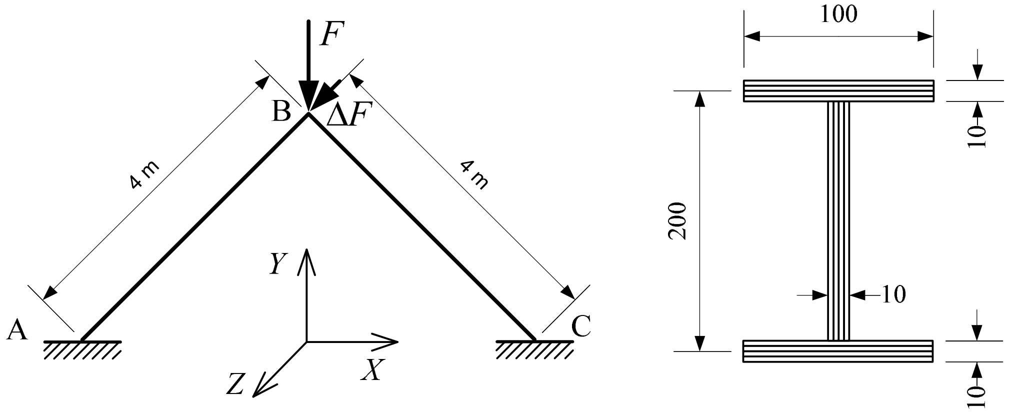
Na sl. 5.24. prikazan je nelinearni odziv konzole za različite redoslijede slaganja slojeva uz vrijednosti kritičnog opterećenja dobivene linearnom analizom u računalnom programu Nastran. U nelinearnoj analizi modelirana je samo lijeva strana okvira sa četiri gredna konačna elementa jer je moguće primijeniti rubne uvjete simetrije.



sl. 5.24. *Dijagram (F – w) za različite redoslijede slaganja slojeva*

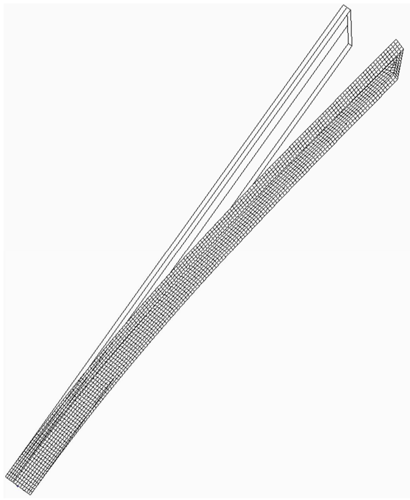
Primjer 5.3.9. *Lateralno izvijanje ukliještenog pravokutnog okvira*

Na sl. 5.26. prikazan je pravokutni okvir ukliješten na krajevima. Okvir je opterećen silom F u težištu spoja B koji je tretiran kao idealno krut. Sila $\Delta F = 0{,}001F$ pridodana je u težištu presjeka B u smjeru osi Z radi iniciranja lateralnog izvijanja. Poprečni presjek oba odsječka okvira je I-profil sa četiri sloja ugljik-epoxya (AS4/3501) s karakteristikama danim u tab. 5.4. Redoslijed kuteva orijentacije vlakana je $[\varphi/-\varphi]_s$.



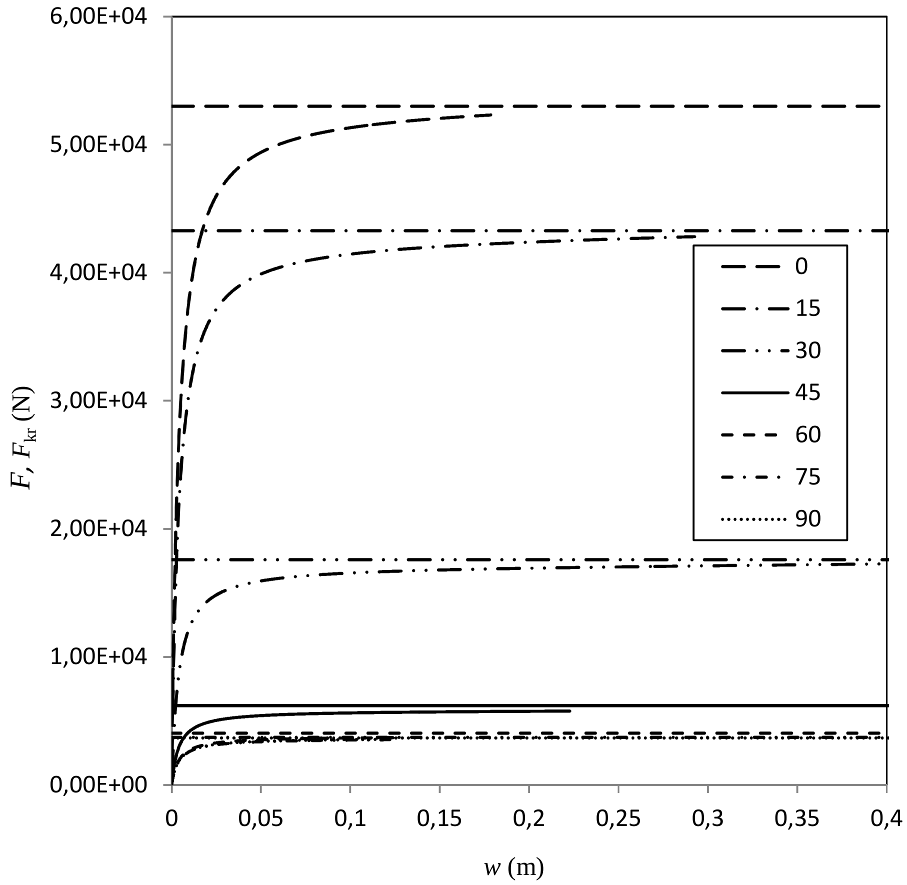
sl. 5.25. *Ukliješteni pravokutni okvir*

Radi usporedbe rezultata izračunate su kritične sile izvijanja linearnom analizom u računalnom programu Nastran sa 2612 shell konačnih elemenata. Na sl. 5.26. prikazana je lijeva strana modela simetričnog okvira.



sl. 5.26. *Prvi mod izvijanja ukliještenog pravokutnog okvira*

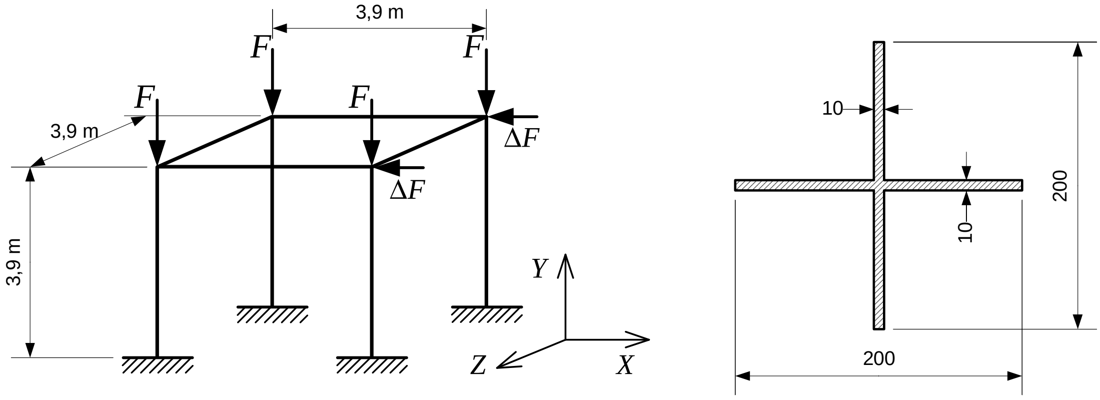
Izvršena je nelinearna analiza stabilnosti za različite orijentacije vlakana i rezultati su prikazani na sl. 5.27. uz vlastite vrijednosti dobivene u računalnom programu Nastran. U nelinearnoj analizi modelirana je samo lijeva strana okvira sa četiri gredna konačna elementa jer je moguće primijeniti rubne uvjete simetrije.



sl. 5.27. *Dijagram (F – w) za različite kuteve vlakana φ*

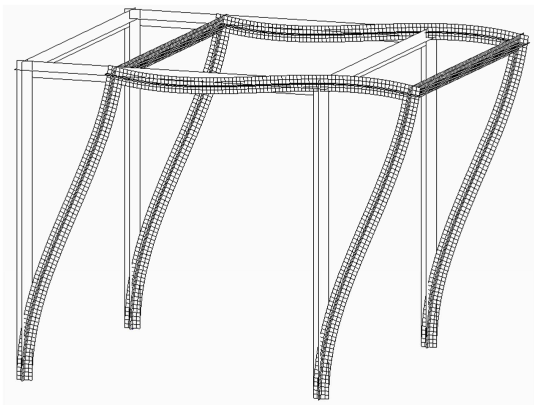
Primjer 5.3.10. *Izvijanje prostornog okvira*

Prostorni okvir na sl. 5.28. opterećen je sa četiri vertikalne sile F i dvije horizontalne sile $\Delta F = 0{,}001F$. Sve grede u okviru su izrađene od dva četveroslojna laminata koji tvore simetrični križni poprečni presjek. Raspored slojeva kompozitnog materijala s karakteristikama danim u tab. 5.4. je $[\varphi/-\varphi]$s. Svi stupovi i sve grede diskretizirane su sa četiri gredna konačna elementa.

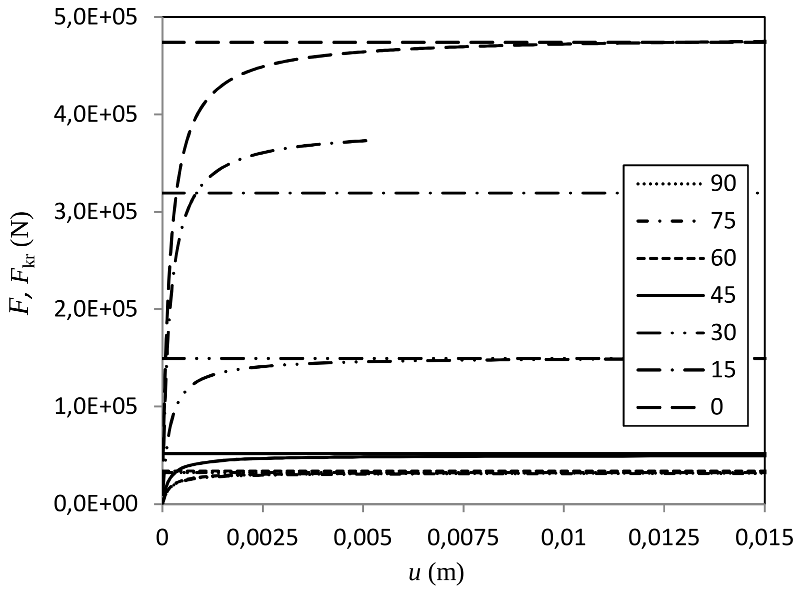


sl. 5.28. *Izvijanje prostornog okvira*

Analizirano je izvijanje okvira za različite kuteve smjera vlakana u rasponu od 0° do 90°. Kritične sile izvijanja dobivene su pomoću shell modela u programskom paketu Nastran (sl. 5.29.) sa 4992 konačna elementa. Na sl. 5.30. prikazan je nelinearan odziv okvira uz prikaz vrijednosti kritičnih sila izvijanja dobivenih programom Nastran.



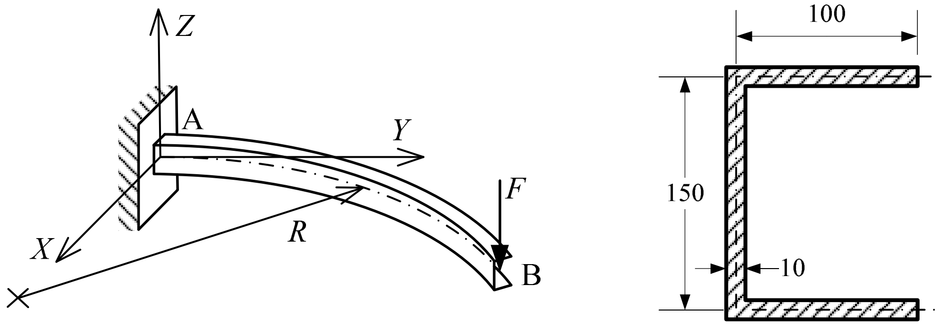
sl. 5.29. *Prvi mod izvijanja shell modela prostornog okvira*



sl. 5.30. *Dijagram (F, Fkr – u) za različite kuteve vlakana φ*

Primjer 5.3.11. *Puzanje pri savijanju i uvijanju zakrivljene konzole*

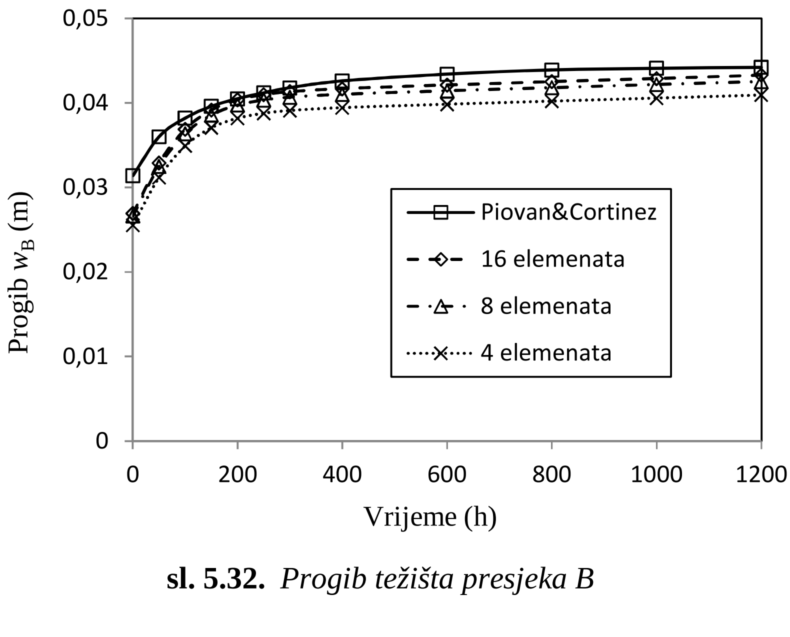
Na sl. 5.31. prikazana je zakrivljena konzola i dimenzije poprečnog presjeka U-profila. Duljina konzole je L = 1,5 m, a radijus zakrivljenosti iznosi R = 2 m. Na slobodnom kraju konzole u težištu presjeka djeluje sila F_Z = 500 N. Konzola je sastavljena od simetričnog balansiranog laminata sa redoslijedom slaganja $[0/0/\text{-}45/45]_s$. Karakteristike materijala su dane u tab. 5.5. Volumni udio vlakana iznosi V_F = 0,54. Na sl. 5.32. prikazan je pomak težišta presjeka B u smjeru osi Z na kraju konzole u ovisnosti o vremenu. Konzola je diskretizirana sa četiri, osam i 16 elemenata. Rezultati su uspoređeni s modelom Piovana i Cortineza [30].



sl. 5.31. *Savijanje i uvijanje zakrivljene konzole*

E_F= 68,67 GPa; ν_F = 0,21; ν_M = 0,38
E_0 = 3,27 GPa; η = 8000 GPah
E_2 = 1,8 GPa; η_2 = 300 GPah

tab. 5.5. *Karakteristike staklenih vlakana i ED-6 matrice*

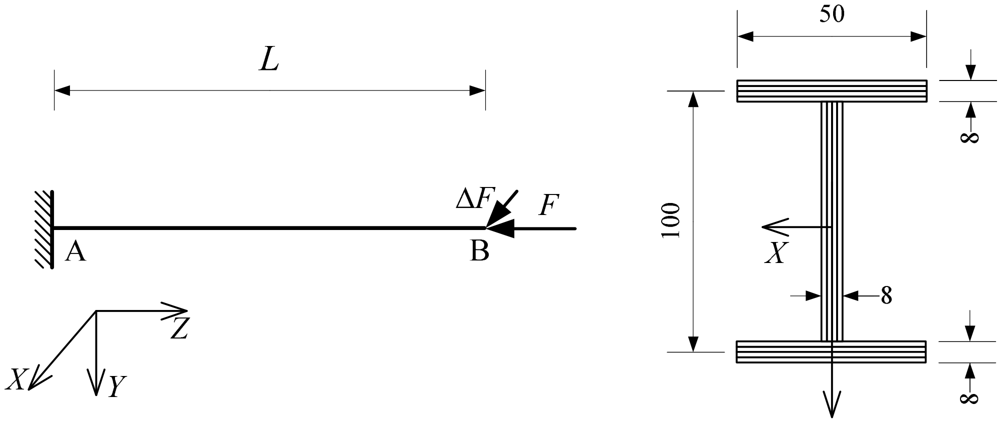


sl. 5.32. *Progib težišta presjeka B*

Primjer 5.3.12. *Fleksijsko izvijanje konzole zbog puzanja*

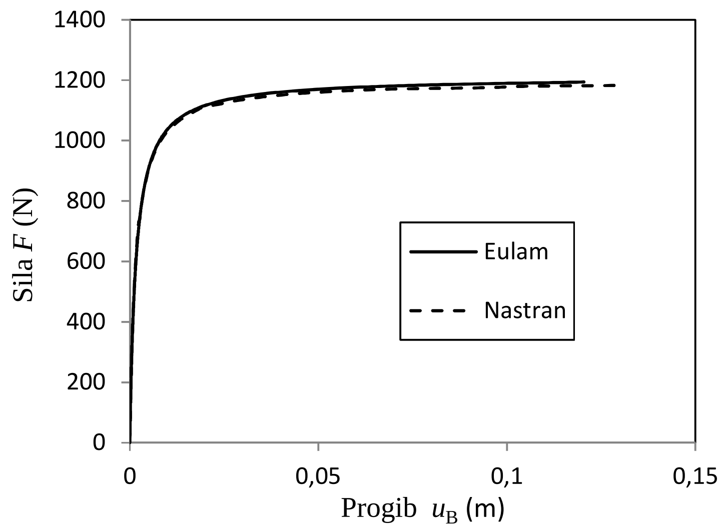
Konzola I-profila na sl. 5.33. opterećena je aksijalnom tlačnom silom. Za iniciranje fleksijskog izvijanja, u presjeku B pridodana je sila ΔF = 0,001F u smjeru osi

X. Duljina konzole iznosi L = 2 m. I struk i pojasevi su izrađeni iz četiri laminatna sloja sa redoslijedom slaganja $[45/-45]_s$. Karakteristike materijala dane su u tab. 5.5.



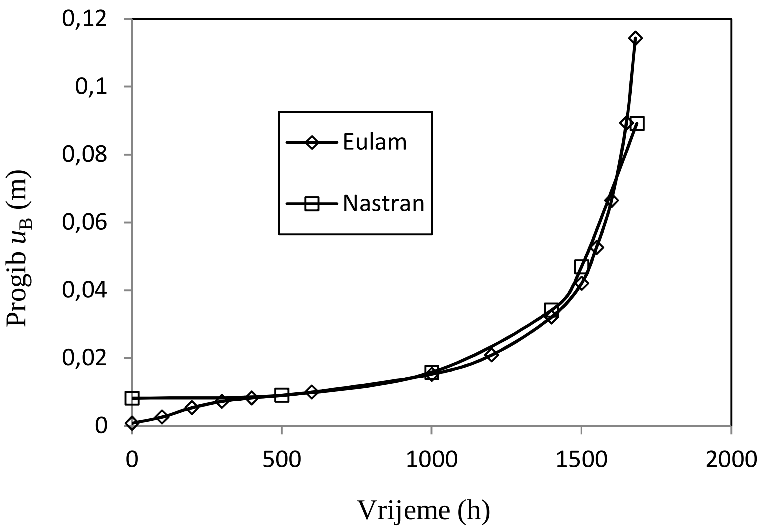
sl. 5.33. *Fleksijsko izvijanje konzole*

Geometrijski nelinearnom analizom utvrđena je kritična sila izvijanja F_{kr} = 1200 N. Na sl. 5.34. dana je usporedba rezultata nelinearnog odziva konzole s rezultatima dobivenim Nastranom.



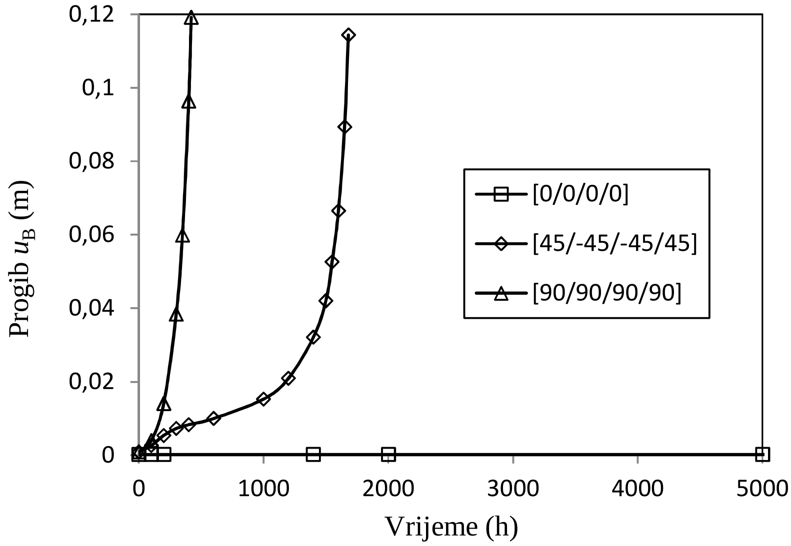
sl. 5.34. *Geometrijski nelinearan odziv konzole*

Također je provedena analiza izvijanja zbog puzanja tako da je konzola opterećena konstantnom tlačnom silom od $F_{kr}/3 = 400$ N. Gubitak stabilnosti nastaje pri konstantnoj sili manjoj od kritične isključivo radi materijalne nelinearnosti tj. radi puzanja materijala. Za modeliranje puzanja korišten je četvero-parametarski model, a konzola je diskretizirana s četiri konačna elementa. Dobiveno je kritično vrijeme izvijanja $t_{kr} \approx 1680$ h što se dobro poklapa s rezultatom koji je dobiven programom Nastran sa 640 Quad konačnih elemenata (sl. 5.35.).



sl. 5.35. *Izvijanje zbog puzanja pri konstantnoj sili F = 400 N*

Na sl. 5.36. prikazani su rezultati analize izvijanja zbog puzanja kada se promatraju različiti redoslijedi slaganja laminatnih slojeva pri jednakoj sili od $F = 400$ N. Iz dijagrama je vidljivo da kada su svi slojevi pod 0°, ne dolazi do izvijanja kao posljedice puzanja materijala. To se može objasniti činjenicom da je odziv puzanja prije svega posljedica puzanja materijala matrice dok su vlakna otporna na puzanje. U slučaju slojeva raspoređenih na spomenuti način (svi slojevi pod kutom 0°) vlakna na sebe preuzimaju glavninu opterećenja te efekt puzanja matrice nije zamjetan i ne dolazi do izvijanja nosača poradi puzanja.



sl. 5.36. *Izvijanje zbog puzanja pri konstantnoj sili F = 400 N za različite redoslijede slaganja laminatnih slojeva*

6. Zaključak

U radu je prikazana konačno-elementna analiza stabilnosti tankostijenih kompozitnih grednih konstrukcija. Uključeni su efekti velikih prostornih pomaka i prostornih rotacija, dok su deformacije smatrane malima. Korišten je pravocrtan gredni konačni element. Pretpostavljeno je da je kutna deformacija srednje plohe jednaka nula i da se poprečni presjek ne deformira u svojoj ravnini. Ravnotežne jednadžbe grednog konačnog elementa izvedene su korištenjem principa virtualnih radova. Korištena je klasična laminatna teorija za kompozite ojačane vlaknima. Model je primjenjiv na različite poprečne presjeke, rasporede slaganja slojeva laminata i rubne uvjete.

Izvedena je linearna i nelinearna analiza stabilnosti. Linearna analiza stabilnosti je promatrana kao problem vlastitih vrijednosti pri čemu su određene vlastite vrijednosti koje predstavljaju kritična opterećenja i odgovarajući vlastiti vektori koji predstavljaju oblike izvijanja. Pretpostavlja se da je konstrukcija idealna i deformacije prije izvijanja su zanemarene.

Kod nelinearne analize implementirana je korotacijska formulacija koja je linearna na nivou elementa, a geometrijska nelinearnost se uvodi transformacijom iz lokalnog u globalni koordinatni sistem. Lokalni koordinatni sistem prati gredni konačni element i dopušta pojednostavljene konstitutivne jednadžbe na nivou lokalnog elementa. Kod nelinearne analize potrebno je uvesti poremećajno opterećenje radi simuliranja nesavršenosti.

Izrađen je izvorni računalni program čija je primjena demonstrirana na nekoliko test primjera. Rezultati su uspoređeni s rezultatima koje su objavili drugi autori te s rezultatima dobivenim korištenjem plošnih konačnih elemenata.

Znanstveno postignuće ovog rada su rezultati dobiveni u obliku izvornog numeričkog rješenja, temeljenog na grednoj konačno-elementnoj formulaciji. Oni predstavljaju izravan doprinos tehničkim znanostima u smislu suvremene analize linearnih i nelinearnih odziva nosivih grednih konstrukcija.

Ovaj algoritam se može nadopuniti na način da se uključi i utjecaj posmičnih deformacija kod savijanja silama, da se omogući deformacija poprečnog presjeka u svojoj ravnini, da se uzme u obzir plastičnost materijala ili temperaturna promjena i u tom smjeru će se kretati buduća istraživanja.

Popis oznaka i simbola

A	površina poprečnog presjeka (m^2)
A_f	površina poprečnog presjeka vlakana (m^2)
A_m	površina poprečnog presjeka matrice (m^2)
A_{ij}	aksijalna krutost (N/m)
b	širina (m)
B_{ij}	spregnuta krutost (N)
$\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{L}}, \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{NL}}$	generalizirane matrice deriviranih interpolacijskih funkcija
C_i	*i*-ta ravnotežna konfiguracija konačnog elementa
C_{ijkl}	tenzor elastičnosti (Pa)
d	diferencijal
D_{ij}	savojna krutost (Nm)
E	Modul elastičnosti (Pa)
E_f	Modul elastičnosti vlakana (Pa)
E_m	Modul elastičnosti matrice (Pa)
E_0	Modul elastičnosti u vremenu t = 0 (Pa)
E_1, E_2	Moduli elastičnosti u Burgersovom modelu (Pa)
e_{ij}	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije linearan u pomacima u, v i w, Almansijev tenzor deformacije
$\tilde{e}_{ij}$	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije linearan u pomacima $\tilde{u}, \tilde{v}$ i $\tilde{w}$
$\mathbf{F}$	vektor unutarnjih sila konstrukcije
F	sila (N)

$\mathbf{f}^e, \bar{\mathbf{f}}^e$	vektor čvornih sila *e*-tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
f_i	volumenske sile (Nm^{-3})
F_{kr}	kritična sila izvijanja (N)
F_{nx}, F_{ny}	Eulerove kritične sile pri čistom fleksijskom izvijanju oko osi x i y (N)
$F_{n\varphi}$	kritična sila pri čistom torzijskom izvijanju (N)
F_x, F_y	smične sile (N)
F_x, F_y	Eulerove kritične sile pri čistom fleksijskom izvijanju oko osi x i y (N)
F_z	aksijalna sila (N)
F_φ	kritična sila pri čistom torzijskom izvijanju (N)
$\tilde{f}(s)$	Laplaceova transformacija (-)
$\hat{f}(s)$	Carsonova transformacija (-)
G	Modul smicanja (Pa)
G_f	Modul smicanja vlakana (Pa)
G_m	Modul smicanja matrice (Pa)
G_{12}	Modul smicanja u ravnini 1-2 (Pa)
h	ukupnu debljina laminata (m)
i	*i*-ti inkrement
I_p	polarni moment inercije poprečnoga presjeka za težište (m^4)
I_{ps}	polarni moment inercije poprečnoga presjeka za centar smicanja (m^4)
i_p	polumjer inercije (m)
I_x, I_y	aksijalni momenti inercije poprečnoga presjeka (m^4)
I_{xy}	centrifugalni momenti inercije poprečnoga presjeka (m^4)
$I_{x\omega}$, $I_{y\omega}$	sektorski centrifugalni momenti inercije (m^5)
I_ω	sektorski moment inercije (m^6)
J	torzijski moment inercije (m^4)
j	*j*-ta iteracija
$\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$	jedinični vektori
$\bar{K}$	Wagnerov koeficijent (Nm^2)

$\mathbf{K}_E$	elastična matrica krutosti konstrukcije
$\mathbf{K}_G$	geometrijska matrica krutosti konstrukcije
$\hat{\mathbf{K}}_G$	linearizirana geometrijska matrica krutosti konstrukcije
$\mathbf{k}_G^e, \overline{\mathbf{k}}_G^e$	geometrijska matrica krutosti *e*-tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{k}_E^e, \overline{\mathbf{k}}_E^e$	elastična matrica krutosti *e*-tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{K}_T$	tangentna matrica krutosti konstrukcije
$\mathbf{k}_T^e, \overline{\mathbf{k}}_T^e$	tangentna matrica krutosti *e*-tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
l, L	duljina (m)
l_0	slobodna duljina izvijanja (m)
$\widehat{L}_{ij}$	tenzor viskoelastične relaksacije u Carsonovoj domeni (Pa)
M	moment (Nm)
M_x, M_y, M_{xy}	momenti savijanja (Nm)
M_z	torzijski moment (Nm)
M_{zz}, M_{sz}	rezultante laminatnih unutrašnjih momenata (N)
M_ω	bimoment (Nm^2)
n	normala
N_x, N_y, N_{xy}	rezultante unutrašnjih sila (N)
N_{zz}, N_{sz}	rezultante laminatnih unutrašnjih sila (N)
$\mathbf{N}_u$	matrica interpolacijskih funkcija pomaka u_s
$\mathbf{N}_v$	matrica interpolacijskih funkcija pomaka v_s
$\mathbf{N}_w$	matrica interpolacijskih funkcija pomaka w_o
$\mathbf{N}_\varphi$	matrica interpolacijskih funkcija pomaka φ_z
O	težište poprečnoga presjeka
$\mathbf{P}$	vektor opterećenja konstrukcije
r	radijus konture (m)

R	Reuterova matrica
Q_{ij}	reducirani tenzor elastičnosti (Pa)
$\overline{Q}_{ij}$	transformirani reducirani tenzor elastičnosti (Pa)
$\overline{Q}_{ij}^{*}$, $\mathbf{Q}_{\mathrm{T}}$	transformirani reducirani tenzor elastičnosti za ravninsko stanje naprezanja (Pa)
Q	linearni diferencijalni operator relaksacije (-)
Q^{-1}	linearni diferencijalni operator puzanja (-)
S	centar smicanja poprečnog presjeka
q	udaljenost proizvoljno odabrane točke pola P od pravca normale n (m)
s	krivocrtna koordinata uzduž konture (m)
S_{ij}	Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste (Pa)
S_{ijkl}	tenzor podatljivosti (Pa)
t	vrijeme (s)
t	tangenta
t_i	površinska sila (Nm^{-2})
T	transformacijska matrica (-)
T_σ	torzijski moment zbog Wagnerovog efekta (Nm)
T_ω	torzijski moment vitoperenja (Nm)
U	vektor čvornih pomaka konstrukcije, vlastiti vektor
U	potencijal unutarnjih sila (J)
$\mathrm{U_E}$	elastična potencijalna energija unutarnjih sila (J)
$\mathrm{U_G}$	geometrijski potencijal početnih unutarnjih i vanjskih sila (J)
u	vektor čvornih pomaka pri savijanu konačnog elementa u ravnini (z, x)
$\mathbf{u}^e$, $\overline{\mathbf{u}}^e$	vektor čvornih pomaka e-tog konačnog elementa u lokalnom, odnosno globalnom koordinatnom sustavu
$\mathbf{U}_0$	vektor pomaka poprečnog presjeka kao kruto tijelo
u, v i w	komponente linearnog polja pomaka po pravcima osi x, y i z (m)
u_0, v_0 i w_0	translacijski pomaci težišta poprečnoga presjeka po pravcima osi x, y i z (m)

u_s , v_s	translacijski pomaci centra smicanja S poprečnoga presjeka po pravcima osi x_s i y_s (m)
$\Delta\mathbf{U}$, $\Delta\hat{\mathbf{U}}$, $\Delta\overline{\mathbf{U}}$	vektori inkrementalnih čvornih pomaka konstrukcije
V	volumen (m^3)
V_f	volumni udjel vlakana (-)
V_m	volumni udjel matrice (-)
W	potencijal vanjskih sila (J)
W, U, V	translacijski pomaci po pravcu globalnih osi Z, X i Y (m)
w, u, v	linearne komponente pomaka po pravcu lokalnih osi z, x i y (m)
$\tilde{w},\tilde{u},\tilde{v}$	nelinearne komponente pomaka po pravcu osi z, x i y (m)
$\overline{w},\overline{u},\overline{v}$	pomaci srednje linije konture presjeka po pravcu osi z, n i s (m)
$\overline{w}^L,\overline{u}^L,\overline{v}^L$	linearne komponente pomaka srednje linije konture presjeka po pravcu osi z, n i s (m)
$\overline{w}^{NL},\overline{u}^{NL},\overline{v}^{NL}$	nelinearne komponente pomaka srednje linije konture presjeka po pravcu osi z, n i s (m)
x_s, y_s	koordinate centra smicanja S poprečnoga presjeka (m)
$\mathbf{x}_\varepsilon$, $\mathbf{x}_\sigma$	matrice udaljenosti i vrijednosti funkcija vitoperenja za integracijske površine
Z, X, Y	globalni koordinatni sustav
z, x, y	lokalni koordinatni sustav s ishodištem u težištu poprečnog presjeka
z, n, s	koordinatni sustav s ishodištem u točki A konture
z_s, x_s, y_s,	koordinatne osi s ishodištem u S, a paralelne s koordinatnim osima z, x i y
β	nagib srednje ravnine laminata na uzdužnu os
Δ	inkrementalna veličina
δ	varijacija
ε	duljinska deformacija (-)
ε_f	duljinska deformacija vlakana (-)
ε_m	duljinska deformacija matrice (-)
ε_1, ε_2, ε_3	duljinska deformacija u smjeru osi 1, 2 i 3 (-)

ε_{ij}, $\boldsymbol{\varepsilon}$	tenzor deformacije (-)
$\dot{\varepsilon}$	derivacija duljinske deformacije po vremenu (s^{-1})
ε_{ij}^{0}	komponente deformacije srednje ravnine laminata (-)
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$	matrica generaliziranih deformacija
γ	kutna deformacija (-)
γ_f	kutna deformacija vlakna (-)
γ_m	kutna deformacija matrice (-)
μ_f	Laméova značajka vlakna (Pa)
$\widehat{\mu}_m$	Laméova značajka matrice (Pa)
η	parametar viskoznosti
η_1, η_2	parametri viskoznosti u Burgersovom modelu
η_{ij}	dio Green-Lagrangeova tenzora deformacije nelinearan u pomacima u, v i w
κ_{ij}	komponente zakrivljenosti srednje ravnine laminata
λ	vlastita vrijednost
λ_f	Laméova značajka vlakna (Pa)
$\widehat{\lambda}_m$	Laméova značajka matrice (Pa)
ν	Poissonov koeficijent
ν_f	Poissonov koeficijent vlakana
ν_m	Poissonov koeficijent matrice
ν_{12}	Poissonov koeficijent u ravnini 1-2
Π	ukupni ili totalni potencijal (J)
θ	parametar vitoperenja poprečnoga presjeka (rad/m)
σ, σ_x, σ_z	normalno naprezanje (Pa)
σ_{ij}, $\boldsymbol{\sigma}$	tenzor naprezanja (Pa)
τ, τ_{zx}, τ_{zy}	tangencijalno naprezanje (Pa)
τ_{ij}	Cauchyjev tenzor naprezanja (Pa)

φ_z, φ_x, φ_y	rotacijski pomaci poprečnoga presjeka kao krutog tijela oko osi z_s, x_s i y_s (rad)
φ	kut orijentacije vlakana (°)
ω	sektorska koordinata ili funkcija vitoperenja (m^2)
∂	parcijalna derivacija

Popis slika

Popis tablica

Životopis

Igor Pešić rođen je 11. srpnja 1979. godine u Rijeci, Republika Hrvatska. Osnovnu školu završio je u Viškovu, dok je srednjoškolsko obrazovanje stekao u Prvoj riječkoj hrvatskoj gimnaziji.

Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci upisao je 1998. godine, gdje je i diplomirao 14. veljače 2006., a diplomski je rad naslova "Proračun roštiljne konstrukcije metodom konačnih elemenata" izradio pod mentorstvom prof. dr. sc. Gorana Turkalja.

Od 2. svibnja 2006. djelatnik je Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, na Zavodu za tehničku mehaniku, u svojstvu znanstvenog novaka na projektu br. 069006, "Numerička analiza nelinearnih problema u projektiranju i proizvodnji", voditelja prof. dr. sc. Josipa Brnića, a potom na projektu br. 069-0691736-1731, "Konačnoelementni modeli za analizu stabilnosti grednih konstrukcija", voditelja prof. dr. sc. Gorana Turkalja.

Sudjeluje u održavanju nastave iz kolegija *Statika*, *Mehanika I*, *Mehanika i elementi konstrukcija*, *Čvrstoća* i *Čvrstoća konstrukcija II* na studijima strojarstva, brodogradnje, elektrotehnike i računarstva.

U sklopu Erasmus programa za mobilnost studenata bio je četiri mjeseca na studijskom boravku na Instituto Superior Tecnico u Lisabonu. Također je sudjelovao na radionici *Nonlinear Computational Solid and Structural Mechanics*, koji se održao na Institutu primijenjene matematike i informacijskih tehnologija u Pavii te na seminaru *Impact Engineering of composite structures* u Međunarodnom centru za mehaniku CISM u Udinama.

U koautorstvu je izradio deset znanstvenih radova u časopisima i u zbornicima domaćih i međunarodnih skupova. Aktivno se služi engleskim jezikom. Član je Hrvatskog društva za mehaniku.

PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

1. AUTOR

Ime i prezime:	Igor Pešić
Datum i mjesto rođenja:	11. srpnja 1979., Rijeka
Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija:	Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, 2006.
Sadašnje zaposlenje:	Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet

2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov:	Konačnoelementni model za analizu izvijanja kompozitnih grednih konstrukcija
Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka:	VIII + 113 stranica, 60 slika, 6 tablica, 57 bibliografskih podataka
Znanstveno polje i grana:	Strojarstvo i Temeljne tehničke znanosti, Tehnička mehanika
Voditelj rada:	Izv. prof. dr. sc. Domagoj Lanc, dipl. ing.
Fakultet na kojem je rad obranjen:	Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet

3.OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme:	10. rujna 2008.
Datum predaje rada:	19. studenoga 2012.
Datum prihvaćanja ocjene rada:	
Sastav Povjerenstva za ocjenu:	1. Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing., predsjednik 2. Izv. prof. dr. sc. Domagoj Lanc, dipl. ing., mentor, član 3. Red. prof. dr. sc. Željan Lozina, dipl. ing., član, (Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split)
Datum obrane:	
Sastav Povjerenstva za obranu:	1. Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing., predsjednik 2. Izv. prof. dr. sc. Domagoj Lanc, dipl. ing., mentor, član 3. Red. prof. dr. sc. Željan Lozina, dipl. ing., član, (Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split)
Datum promocije:	

Oznaka: DD Tek. broj: UDK …

Konačnoelementni model za analizu izvijanja kompozitnih grednih konstrukcija

Igor Pešić

Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

Ključne riječi: stabilnost, kompoziti, gredne konstrukcije, metoda konačnih elemenata, puzanje

Sažetak: U ovom radu je prikazana konačnoelementna analiza stabilnosti tankostjenih kompozitnih grednih konstrukcija. Korišten je gredni konačni element pod pretpostavkom velikih pomaka, ali malih deformacija. Izvedena je linearna i nelinearna analiza stabilnosti. Kod linearne analize korišteno je nelinearno polje pomaka koje uzima u obzir efekte velikih rotacija, a kod nelinearne analize implementirana je korotacijska formulacija koja je linearna na nivou elementa, a geometrijska nelinearnost se uvodi transformacijom u globalni koordinatni sistem. Korištena je klasična laminatna teorija za vlaknom ojačane kompozite. Analitički model također opisuje linearno viskoelastično ponašanje vlaknima ojačanih plastičnih kompozitnih laminiranih greda. Razvijen je računalni program koji je verificiran na testnim primjerima.

Rad nije objavljen.

Mentor: Izv. prof. dr. sc. Domagoj Lanc, dipl. ing. stroj.

Sastav Povjerenstva za ocjenu:
1. Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing., predsjednik
2. Izv. prof. dr. sc. Domagoj Lanc, dipl. ing., mentor, član
3. Red. prof. dr. sc. Željan Lozina, dipl. ing., član, (Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split)

Sastav Povjerenstva za obranu:
1. Red. prof. dr. sc. Josip Brnić, dipl. ing., predsjednik
2. Izv. prof. dr. sc. Domagoj Lanc, dipl. ing., mentor, član
3. Red. prof. dr. sc. Željan Lozina, dipl. ing., član, (Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split)

Datum obrane:

Rad je pohranjen na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.
(VIII + 113, 60, 6, 57, hrvatski jezik)

DD

UDK …

Konačnoelementni model za analizu izvijanja kompozitnih grednih konstrukcija

I Pešić, I..

II Sveučilište u Rijeci
Tehnički fakultet
Hrvatska

Ključne riječi:
stabilnost
kompoziti
gredne konstrukcije
metoda konačnih elemenata
puzanje

Finite Element Model for Buckling Analysis of Composite Beam Structures

Igor Pešić

University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Key words: stability, composites, beam structures, finite element, creep

Summary: This work presents a finite element algorithm for buckling analysis of thin-walled laminated composite beam-type structures. One-dimensional finite element is employed under the assumptions of large displacements, but small strains. The non-linear displacement field of cross-section has been used, which includes the large rotation effects. Stability analysis has been performed in an eigenvalue manner and in load deflection manner using co-rotational formulation. Laminates have been modeled on the basis of classical lamination theory. Analytical model also predict the linear viscoelastic behavior of thin-walled laminated fiber-reinforced plastic composite beams. Computer program has been developed and verified on test examples

This thesis has not been published.

Mentor: D. Sc. B. ME. Josip Brnić, Prof.

Advisors: 1. D. Sc. B. ME. Josip Brnić, Prof.
2. D. Sc. B. ME. Domagoj Lanc, Prof.
3. D. Sc. B. ME. Željan Lozina, Prof. (Faculty of Electrical Eng., Mech. Eng. and Naval Architecture, Split)

Reviewers: 1. D. Sc. B. ME. Josip Brnić, Prof.
2. D. Sc. B. ME. Domagoj Lanc, Prof.
3. D. Sc. B. ME. Željan Lozina, Prof. (Faculty of Electrical Eng., Mech. Eng. and Naval Architecture, Split)

Presentation:

This thesis is deposited in the library of the University of Rijeka, Faculty of Engineering.
(VIII + 113, 60, 6, 57, Croatian language)

DR

UDC …

Finite Element Model for Buckling Analysis
of Composite Beam Structures

I Pešić I.

II University of Rijeka
Faculty of Engineering
Croatia

Key words:
stability
composites
beam structures
finite element
creep

Popis literature

[1] Jones, R. M.: *Mechanics of composite materials*, Taylor and Francis Inc, Philadelphia, 1999.

[2] Christensen, R. M.: *Mechanics of Composite Materials,* Dover Publications Inc, Mineola, 2005.

[3] Daniel, I. M., Ishai, O.: *Engineering Mechanics of Composite Materials,* Oxford University Press, New York, 2006.

[4] Hodges, D. H.: *Nonlinear Composite Beam Theory*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, Reston, 2006.

[5] Scudra, A. M., Bulavs, F. Y., Gurvich, M. R., Kruklinsh, A. A.: *Structural Analysis of Composite Beam Systems*, Technomic Publishing Co., Inc, Lancaster, 1991.

[6] Librescu, L., Song, O.: *Thin-Walled Composite Beams*, Springer, Dordrecht, 2006.

[7] Bauld, N. Tzeng, L. A.: Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections, *International Journal of Solids and Structures*, **20** (1984) 3, 277-297

[8] Shearbourne, A. N., Kabir, M. Z.: Shear strains effects in lateral stability of thin-walled fibrous composite beams, *Journal* of *Engineering* Mechanics *ASCE*, **121** **(**1995) 5, 640–647

[9] Godoy, L. A., Barbero, E. J., Raftoyiannis, I.: Interactive buckling analysis of fiber-reiforced thin-walled columns, *Journal of Composite materials*, **29** (1995) 5, 591-613

[10] Librescu, L., Song O.: On the aeroelastic tailoring of composite aircraft swept wings modeled as thin walled beam structures, *Composite Engineering*, **2** (1992), 497-512

[11] Bhaskar, K., Librescu, L.: Geometrically non-linear theory for laminated anisotropic thin-walled beams, *International Journal of Engineering Science*, **33** (1995), 1331-1344

[12] Wu X. X., Sun, C. T.: Vibration analysis of laminated composite thin-walled beams using finite elements, *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **29** (1990) 5, 736-742

[13] Kollar, L. P.: Flexural-torsional buckling of open section composite columns with shear deformation, *International Journal of Solids and Structures*, **38** (2001), 7525-7541

[14] Sapkas, A., Kollar, L. P.: Lateral-torsional buckling of composite beams, *International Journal of Solids and Structures*, **39** (2001), 2939-2963

[15] Lee, J., Kim, S. E.: Flexural-torsional buckling of thin-walled I-section composites, *Computers & Structures* **79** (2001), 987–995

[16] Lee, J., Kim, S. E.: Lateral buckling analysis of thin-walled laminated channel-section beams, *Composite Structures* **56** (2002), 391–399

[17] Lee, J., Kim, S. E., Hong, K.: Lateral buckling I-section beams, *Engineering Structures* **24** (2002), 955–964

[18] Massa, J. C., Barbero, E. J.: A strength of materials formulation for thin-walled composite beams with torsion, *Journal of Composite Materials*, **32** (1998) 17, 1560-1594

[19] Pollock, G. D., Zak, A. R., Hilton, H. H., Aahmad, M. F.: Shear center for elastic thin-walled composite beams, *Structural Engineering & Mechanics*, **3** (1995) 1, 91-103

[20] Omidvar, B.: Shear coefficient in orthotropic thin-walled composite beams, *Journal of Composites for Construction*, **2** (1996) 1, 46-56

[21] Cortínez, V. H.: Dynamics of shear deformable thin-walled open beams subjected to initial stresses, *Rev. Int. Met. Num. Calculo y Diseno en Ingeneria*, **14** (1998) 3, 293-316

[22] Cortínez, V. H., Piovan, M. T.: Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability, *Journal of Sound and Vibration* **258** (2002) 4, 701–723

[23] Silvestre, N., Camotim, D.: First and second-order GBT for arbitrary orthotropic materials, *Thin-Walled structures*, **40** (2002) 9, 755-820

[24] N. F. Silva, N. Silvestre: On the Influence of Material Couplings on the linear and Buckling Behavior if I-section Composite Columns, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **7** (2007) 2, 243–272

[25] Barbero, E. J., Luciano, R.: Micromechanical formulas for the relaxation tensor of linear viscoelastic composites with transversally isotropic fibers, *International Journal of Solids and Structures*, **32** (1995) 13, 3466-3493

[26] Mase, G.: *Mecanica del Medio Continuo*, Compendios Schawm-McGraw-Hill, Mexico, 1977.

[27] Harris, J. H., Barbero E. J.:Prediction of creep properties of laminated composites from matrix creep data, *Journal of Reinforced Plastics and Composites* **17** (1998) 4, 361-378

[28] Qiao, P., Barbero, E. J., Davalos, J. F., On the linear viscoelasticity of thin walled laminated composite beams, Journal of Composite materials, **34** (2000), 39-68

[29] Oliveira, B. F., Creus, G. J.: Nonlinear viscoelastic analysis of thin walled beams in composite material, *Thin-Walled Structures*, **41** (2003), 957-971

[30] Piovan, M. T., Cortinez, V. H.: Linear viscoelastic analysis of straight and curved thin-walled laminated composite beams, *International Journal of Solids and Structures*, **45** (2008), 3466-3493

[31] Daniel, I. M., Ishai, O.: *Engineering mechanics of composite materials*, Oxford University Press, Inc., Oxford, 2006.

[32] Brnić, J., Turkalj, G.: *Nauka o čvrstoći I*, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2004.

[33] Voyiadjis, G. Z., Kattan, P. I.: *Mechanics of composite materials with MATLAB*, Louisiana State University, Baton Rouge, 2005.

[34] Findley, W. N., Lai, J. S., Onaran K.: *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials,* Dover Publications, New York, 1989.

[35] Laws, N., McLaaughlin, R.: Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials, *Proceedings of the Royal Society*, London, **39** (1978), 251-273

[36] Wang, Y. M., Weng, G. J.: The influence of inclusion shape on the overall viscoelastic behavior of composites, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **59** (1992) 510-518

[37] Luciano, R. , Barbero, E. J. : Analytical expressions for the relaxation moduli of linear viscoelastic composite with periodic microstructure, *ASME Journal of Applied Mechanics*, **62** (1995) 786-793

[38] Nemat-Naser, S., Taya M.: On effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids, *Quarterly applied Mathematics*, **39** (1981) 43-59

[39] Luciano, R. , Barbero, E. J. : Formulas for the stiffness of composite with periodic microstructure, *International Journal of Solids and Structures*, **31** (1995) 21, 2933-2944

[40] Boresi, A. P., Schmidt, R. J., Sidebottom, O. M.: *Advanced mechanics of materials*, John Wiley & Sons, New York, 1993.

[41] Bull, J. W.: *Finite element applications to thin-walled structures*, Elsevier Applied Science, London i New York, 1990.

[42] Doyle, J. F.: *Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures: Statics, Dynamics and Stability*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[43] Gjelsvik, A.: *The theory of thin walled bars,* John Wiley & Sons, New York, 1981.

[44] Ojalvo, M.: *Thin-walled bars with open profiles*, The Olive Press, Colorado, 1991.

[45] Brnić, J.: *Mehanika i elementi konstrukcija*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[46] Šimić, V.: *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[47] G. Turkalj, J. Brnić, Analiza elastičnog izvijanja tankostjenih grednih konstrukcija s obzirom na velike rotacije, *Strojarstvo*, **42** (2000), 217-230.

[48] Mihanović, A., *Stabilnost konstrukcija*, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktora, Zagreb, 1993.

[49] Yang, Y. B, Kuo, S. R.: *Theory & analysis of nonlinear framed structures*, Prentice Hall, New York, 1994.

[50] Turkalj, G.: *Nelinearna analiza stabilnosti tankostjenih grednih struktura*, Doktorska disertacija, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2000.

[51] Brnić, J.: Određivanje vlastitih vrijednosti slobodnih neprigušenih vibracija linearnih ravninskih konstrukcija, *Strojarstvo*, **27** (1985), 139-143.

[52] Kim, M. Y., Chang, S. P., Kim, S. B.: Spatial Stability and Free Vibration of Shear Flexible Thin-Walled Elastic Beams. II: Numerical Approach, *Int. Journal for Numerical Method in Engineering*, **37** (1994), 4117-4140.

[53] Chang, S. P., Kim, S. B., Kim, M. Y.: Stability of Shear Deformable Thin-Walled Space Frames and Circular Arches, *Journal of Engineering Mechanics*, **122** (1996), 844-854.

[54] Izzuddin, B. A., Elnashai, A. S.: Eulerian formulation for large displacement analysis of space frames, *Journal of Engineering Mechanics*, **119** (1993), 549-569.

[55] Yang, Y. B., McGuire, W.: Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis, *Journal of Structural Engineering*, **112** (1986) 4, 853-877

[56] Cardoso, J. E. B., Benedito, N. M. B., Valido, A. J. J.: Finite element analysis of thin-walled composite laminated beams with geometrically nonlinear behavior including warping deformation, *Thin-Walled Structures*, **47** (2009), 1363-1372

[57] Cortinez, V. H., Piovan, M. T.: Stability of composite thin-walled beams with shear deformability, *Computers & Structures*, **84** (2006), 978-990