

SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

**AKTIVNO SMANJENJE VIBRACIJA KOD  
ROTACIJSKIH STROJEVA**

Doktorska disertacija

Goranka Štimac

Rijeka, 2012.



SVEUČILIŠTE U RIJECI  
TEHNIČKI FAKULTET

**AKTIVNO SMANJENJE VIBRACIJA KOD  
ROTACIJSKIH STROJEVA**

Doktorska disertacija

Goranka Štimac

Mentor: Izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut  
Komentor: Red. prof. dr. sc. Roberto Žigulić

Rijeka, 2012.



(odluka Fakultetskoga vijeća Tehničkoga fakulteta  
Sveučilišta u Rijeci o odobrenju teme)



# Sažetak

Zbog beskontaktnog principa rada koji se ostvaruje primjenom aktivno reguliranih elektromagneta rotacijski strojevi s aktivnim magnetskim ležajevima (AML) osiguravaju mnoge prednosti u odnosu na konvencionalne mehaničke ležajeve, kao što su odsutnost trenja i mehaničkog trošenja, rad na visokim brzinama vrtnje, mogućnost aktivnog smanjenja vibracija i sl. U ovom radu izrađen je numerički model koji omogućuje analizu dinamičkog ponašanja elastičnog rotora oslonjenog na dva radijalna AML te projektiranje i implementaciju odabranih metoda upravljanja. Znanstveni doprinos ove disertacije očituje se u sustavnom postupku rješavanja problema nekolokacije sustava, gdje se ciljanim mehaničkim izbjegavanjem modalnog čvora između parova senzor/aktuator razmatranog ležaja osiguravaju povoljniji uvjeti za primjenu PID metode upravljanja i u tim uvjetima osigurava stabilan prolazak prve kritične brzine. Osim spomenute PID metode, primijenjena je i Glover-McFarlane  $H_\infty$  metoda upravljanja gdje su dobivene povoljnije funkcije osjetljivosti sustava u odnosu na PID upravljanje. Pri tome je predloženo da se funkcija predkompensatora, kojom se oblikuje sustav u otvorenom krugu, odabere u obliku prijenosne funkcije prethodno podešenog PID regulatora i prikladno odabranih *notch* filtara s kojima se postiže stabilan rad sustava u zatvorenoj petlji. U radu su prezentirani rezultati različitih eksperimentalnih ispitivanja pri čemu je uočena dobra podudarnost s rezultatima numeričkih simulacija. Time je potvrđena učinkovitost numeričkog modela.

# Summary

Because of the contactless operation principle, which is realized by actively controlled electromagnets, the rotating machines employing active magnetic bearings (AMBs) provide many advantages over the conventional ones, such as the absence of friction and mechanical wear, high operational speeds, active vibration control etc. In this work a numerical model for dynamic analysis of flexible rotors supported by two radial AMBs, as well as for implementation of the control design methods is built. The scientific contribution of this dissertation is the result of the systematic procedure to solve problems characteristic for noncollocated systems, where by mechanical avoiding of the modal nodes between the sensor/actuator pairs of the bearing considered, favorable conditions for the application of PID control design method and stable passage of the first critical speed are provided. Besides PID control method, Glover-McFarlane  $H_\infty$  loop-shaping method is applied whereby better sensitivity functions are obtained. It is proposed that the precompensator function, which gives a desired shape of the open loop system, is chosen as a transfer function of previously tuned PID controller and notch filters which ensure stable closed loop response. The results of the different experimental tests presented in the work are in a good agreement with the results of numerical simulations. This approves the efficiency of the numerical model.







# Predgovor

Doktorska disertacija pod naslovom *Aktivno smanjenje vibracija kod rotacijskih strojeva* izrađena je u okviru znanstvenog projekta *Redukcija vibracija i buke strojeva mehatroničkim pristupom* (Br. 069-0691736-1733) financiranog od strane Ministarstva znanosti Republike Hrvatske na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci.

Ovaj se rad može smatrati uvodom u istraživanje dinamike rotora s aktivnim magnetskim ležajevima na Katedri za dinamiku strojeva i prirodnim proširenjem znanja i spoznaja njenih članova na polju dinamike rotora s konvencionalnim mehaničkim ležajevima (kotrljajućim ili kliznim). Naglasak je dan na izradu numeričkog modela na temelju kojeg se može dobiti uvid u osnovna ponašanja rotora s aktivnim magnetskim ležajevima te razradu problematike koja se javlja u slučaju elastičnih rotora s nekolokacijom. Poseban je izazov projektiranje i implementacija metode upravljanja koja može omogućiti stabilan rad rotora iznad prve kritične brzine i objedinjavanje pozitivnih strana klasičnog i robusnog upravljanja.

Veliku zahvalnost upućujem svom mentoru izv. prof. dr. sc. Sanjinu Brautu na stručnoj i znanstvenoj pomoći, sugestijama i usmjeravanju ovog istraživanja te svom komentoru red. prof. dr. sc. Robertu Žiguliću na pristupačnosti i svim korisnim savjetima vezanim za nastanak ovog rada. Red. prof. dr. sc. Josipu Brniću posebna zahvala na potpori tijekom mog poslijediplomskog doktorskog studija. Osim toga, čast mi je što se mogu zahvaliti dr. sc. Martinu Aenisu iz poduzeća Mecatronix (Darmstadt) na savjetima vezanima za nabavu i implementaciju ispitnog stola s aktivnim magnetskim ležajevima, a posebno dr. sc. Christianu Ehmannu bez čije bi nesebične pomoći vezane za podešavanje eksperimentalnog sustava cjelovitost ovog rada bila neizmjereno teže ostvariva. Posebne zahvale upućujem doc. dr. sc. Nevenu Buliću na detaljnom pregledu ove disertacije i svim korisnim savjetima. Zahvaljujem se kolegi mr. sc. Anti Skoblaru na brojnim diskusijama i razmijenjenim idejama koje su utjecale na razvoj ovog rada, svim profesorima i kolegama sa Zavoda za tehničku mehaniku, kao i ostalim profesorima i prijateljima koji su na bilo koji način doprinijeli izradi ovog rada.

Posebnu zahvalnost dugujem roditeljima i sestri te dečku Branimiru koji su mi pružili bezuvjetnu potporu i razumijevanje.

*Autorica*



# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Značaj i primjena aktivnih magnetskih ležajeva (AML)	1
1.2. Osnovna struktura i princip rada AML	2
1.3. Problematika primjene AML s elastičnim rotorima	5
1.4. Pregled dosadašnjih istraživanja	5
1.4.1. Počeci istraživanja AML tehnologija	6
1.4.2. Metode projektiranja regulatora za AML sustave	8
1.5. Ciljevi i struktura disertacije	10
<b>2. Modeliranje rotora s AML</b>	<b>13</b>
2.1. Modeliranje aktivnih magnetskih ležajeva	13
2.1.1. Modeliranje radijalnih elektromagneta	13
2.1.2. Dinamički model koncentrirane mase na AML	16
2.2. Modeliranje sustava AML i krutog rotora	16
2.3. Modeliranje sustava AML i elastičnih rotora	19
2.3.1. Model rotora primjenom metode konačnih elemenata (MKE)	19
2.3.1.1. Konačni element za prostornu analizu dinamike rotora	20
2.3.1.2. Kruti diskovi	22
2.3.1.3. Ležajevi	22
2.3.1.4. Jednadžba gibanja elastičnog rotora	23
2.3.2. Modalna dekompozicija	24
2.3.3. Modalna redukcija	26
2.3.4. Model prostora stanja elastičnog rotora oslonjenog na AML	27
2.4. Model senzora	28
2.5. Model pojačala snage	29
2.6. Kašnjenje signala	30
<b>3. Regulatori za elastične rotore s AML</b>	<b>31</b>
3.1. PID upravljanje	32
3.1.1. PID regulatori za AML	35
3.1.2. <i>Notch</i> filtri	38
3.2. Opća konfiguracija sustava za robusno upravljanje	38

3.3.	Nesigurnosti i robusnost sustava .....	42
3.3.1.	Parametarske nesigurnosti.....	42
3.3.2.	Nestrukturirane nesigurnosti .....	43
3.3.3.	Strukturirane nesigurnosti .....	45
3.4.	Ciljevi pri projektiranju regulatora.....	45
3.4.1.	Nominalna i robusna stabilnost.....	46
3.4.2.	Nominalne i robusne karakteristike .....	47
3.5.	$H_\infty$ metoda upravljanja .....	49
3.5.1.	$H_\infty$ metoda mješovite osjetljivosti .....	49
3.5.2.	Glover-McFarlane $H_\infty$ metoda.....	51
3.5.2.1.	Robusna stabilizacija .....	52
3.5.2.2.	Postupak implementacije Glover-McFarlane $H_\infty$ metode.....	53
<b>4.</b>	<b>Numerički model elastičnog rotora oslonjenog na radijalnim AML.....</b>	<b>55</b>
4.1.	Opis numeričkog modela za analizu dinamike rotora s AML.....	55
4.1.1.	Struktura numeričkog programa u okruženju Matlab/ Simulink .....	56
4.1.2.	Korekcije simulacijskog modela.....	68
4.2.	Odabir konfiguracije sustava.....	69
4.3.	Dinamička analiza neoslonjenog rotora .....	78
<b>5.</b>	<b>Eksperimentalni model .....</b>	<b>83</b>
5.1.	Konfiguracija ispitnog stola .....	83
5.2.	Priprema eksperimentalnog sustava .....	87
5.3.	Eksperimentalna mjerenja .....	88
<b>6.</b>	<b>Upravljanje i robusna stabilizacija .....</b>	<b>99</b>
6.1.	Korigirani matematički model.....	99
6.2.	PID upravljanje.....	101
6.3.	Robusna stabilizacija .....	108
<b>Zaključak.....</b>		<b>113</b>
<b>Popis literature.....</b>		<b>117</b>
<b>Popis oznaka i simbola .....</b>		<b>123</b>
<b>Popis slika.....</b>		<b>129</b>
<b>Popis tablica .....</b>		<b>133</b>

<b>PRILOG A: Singularne vrijednosti.....</b>	<b>135</b>
<b>PRILOG B: Nyquistov kriterij i teorem malog pojačanja.....</b>	<b>139</b>
<b>PRILOG C: Numerički program – ispis iz komandnog prozora u okružju Matlab.....</b>	<b>141</b>
<b>PRILOG D: Numerički program – odabir konfiguracije sustava .....</b>	<b>145</b>
<b>Životopis.....</b>	<b>147</b>

# **Poglavlje 1.**

## **Uvod**

U ovom je poglavlju opisan značaj tehnologije aktivnih magnetskih ležajeva (AML) s posebnim naglaskom na primjenu kod rotacijskih strojeva te njene prednosti u odnosu na konvencionalne ležajeve. Slijedi prikaz osnovne strukture i principa rada AML te postojeće problematike na tom području, kao i dosadašnjih saznanja i spoznaja na području sustava AML i elastičnih rotora. Razmatranjem svih iznesenih informacija naposljetku su prikazani ciljevi i struktura ove disertacije.

### **1.1. Značaj i primjena aktivnih magnetskih ležajeva (AML)**

Od samog nastanka rotacijskih strojeva inženjeri su suočeni s problemom mehaničkih vibracija. S obzirom da je u tradicionalnim rotacijskim strojevima (kompresori, turbine, pume i sl.) osovina oslonjena na ležajevima s kotrljajućim elementima, koji koriste metalne kuglice ili valjke za pridržavanje osovine, ili kliznim ležajevima, u kojima se osovina pridržava djelovanjem ulja pod visokim tlakom, u njima svojstveno dolazi do kontakta između rotorskog i statorskog dijela stroja. Stoga se prirodno nametnula potreba za beskontaktnim pridržavanjem rotora, kojim bi se osiguralo uklanjanje skupih uljnih sustava, smanjilo zagrijavanje i trošenje ležajeva uz istovremeno postizanje vrlo visokih rotacijskih brzina vrtnje. Iz te su potrebe kao novo tehnološko rješenje razvijeni aktivni magnetski ležajevi čiji se osnovni princip rada bazira na principu magnetske levitacije. Budući da je pridržavanje rotora beskontaktno, relativno gibanje između statora i rotora se ostvaruje bez trenja ili trošenja, odakle proizlaze sve spomenute prednosti, ali i neizbježni nedostaci povezani s tehnologijom magnetskih ležajeva, kao što su troškovi opreme, nestabilnosti sustava te svojstveno niža nosivost.

Posljednjih dvadesetak godina elektromagnetsko pridržavanje rotora pronalazi svoje mjesto u inženjerskoj praksi, pri čemu se ističu sljedeća područja:

- *Turbostrojevi* (kompresori, turbomolekularne pumpe, turbine). Glavna prednost primjene AML tehnologije u ovoj skupini strojeva proizlazi iz mogućnosti aktivnog upravljanja i prigušivanja vibracija. Osim toga, s obzirom da u sustavima s AML ne postoje fluidi u ležajevima (npr. ulje), ne postoji opasnost od njihove interakcije s fluidima procesa, čime se konstrukcija stroja značajno pojednostavnjuje (uklonjeni skupi uljni sustavi i brtve). Naposljetku, nezanemariva je činjenica da AML omogućavaju samokontrolu i dijagnostiku spomenutih rotorskih sustava, postizanje nižih troškova održavanja te nižeg utroška energije.
- *Alatni strojevi*. Glavna prednost primjene AML u ovom području proizlazi iz mogućnosti razvoja veoma velikih brzina vretena pri kojima se postiže visoka preciznost, koja je jedna od glavnih karakteristika koja se traži od alatnih strojeva za glodanje i precizno brušenje.
- *Vakuumski sustavi i inercijalni spremnici energije*. Odsutnost mehaničkog trošenja i trenja, kao i aerodinamičkih gubitaka čini AML poželjnom tehnologijom u ovom području.

Unatoč cijeni, koja se još uvijek smatra ograničavajućim faktorom za širu industrijsku primjenu, AML osiguravaju ekonomsku isplativost na dulji rok zbog smanjenih troškova održavanja te u specijalnim primjenama koje konvencionalni ležajevi ne mogu zadovoljiti (inercijalni spremnici energije, medicinski uređaji, npr. umjetne pumpe srca i sl.).

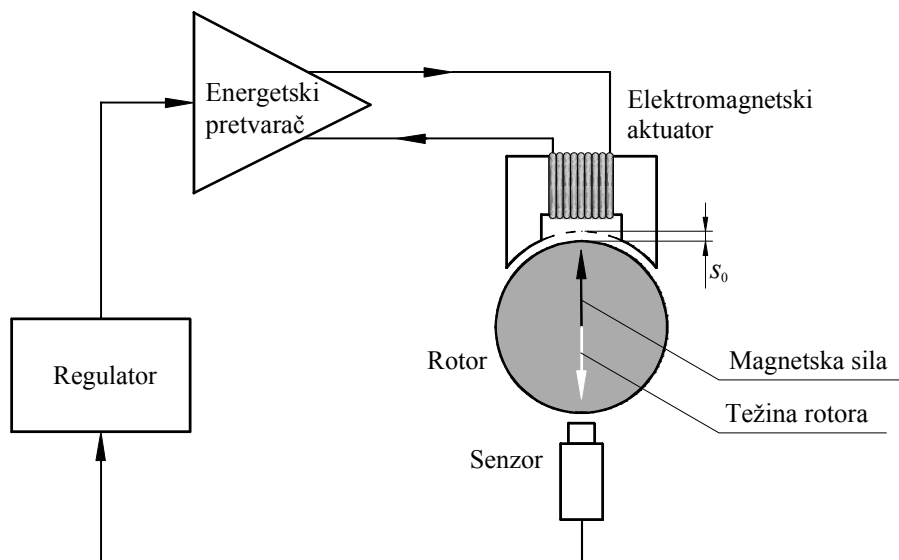
## 1.2. Osnovna struktura i princip rada AML

Osnovni funkcionalni princip aktivne magnetske levitacije je prikazan shematski na slici 1.1. za jedan stupanj slobode gibanja rotora. Glavni dio sustava čini elektromagnetski aktuator koji na temelju električne struje u zavojnici proizvodi privlačnu magnetsku silu potrebnu za pridržavanje rotora.

Pod pretpostavkom da se struja održava konstantnom, a rotor giba u smjeru ispod svog ravnotežnog položaja ( $s - s_0 > 0$ ), zbog povećavanja zračnosti  $s$  između rotora i magneta magnetska se sila smanjuje što naposljetku dovodi do pada rotora. U istim uvjetima, ali uz pretpostavku da se rotor giba naviše, tj. u smjeru iznad svog ravnotežnog položaja ( $s - s_0 < 0$ ), uslijed smanjivanja udaljenosti do magneta dolazi do neizbježnog porasta magnetske sile i u krajnjem slučaju do udara rotora u magnet. Kako bi se izbjeglo nestabilno ponašanje i osigurala stabilna levitacija magnetsko polje se mora konstantno prilagođavati. S tim su ciljem u sustav ugrađeni senzori koji mjere pomak rotora, regulator koji na temelju odstupanja



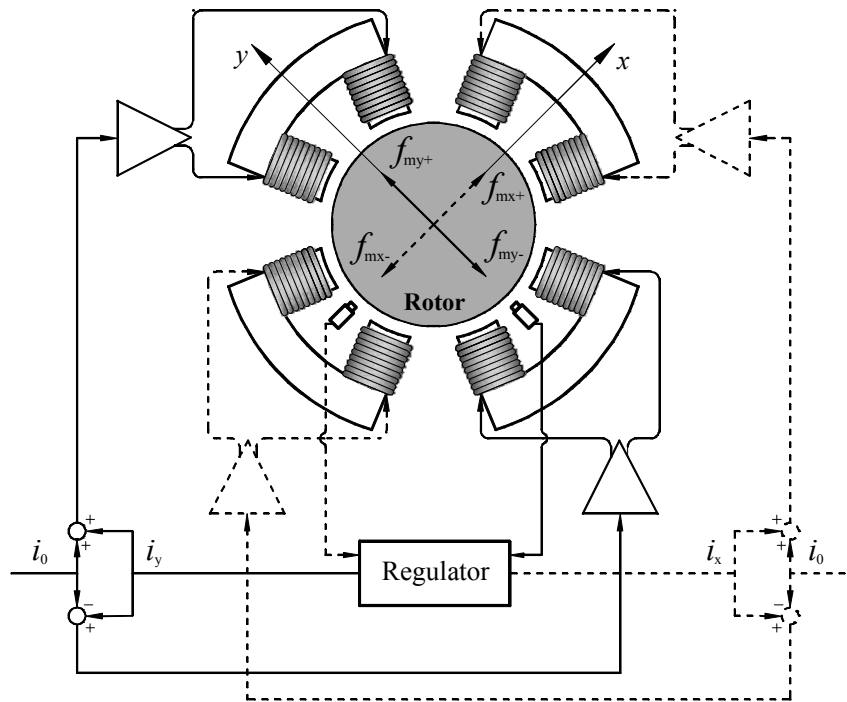
izmjenjenog pomaka od referentnog položaja proizvodi regulacijski signal te energetski pretvarač koji stvara odgovarajući strujni signal potreban za napajanje elektromagneta i stvaranje magnetske sile kojom se održava stabilna levitacija.



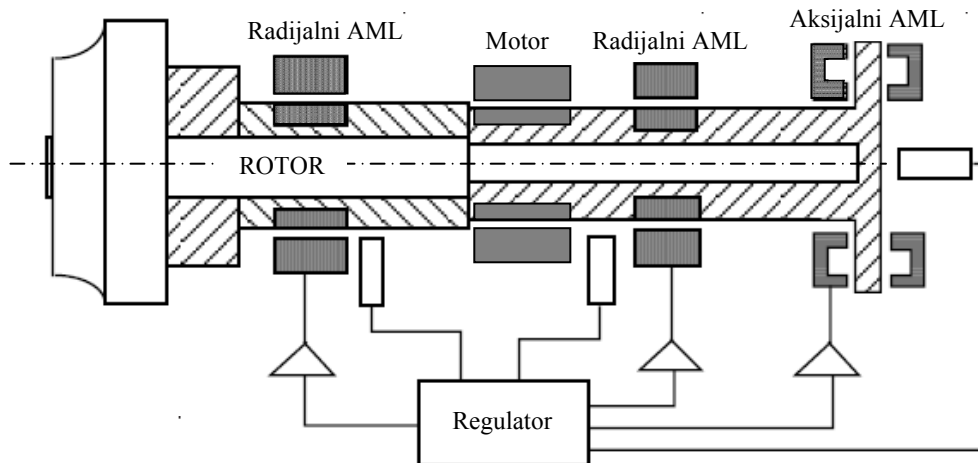
**Slika 1.1.** Osnovni princip rada AML s jednim stupnjem slobode gibanja (preuzeto iz [5])

Ukoliko se gore opisani sustav proširi na način da u smjeru dva stupnja slobode gibanja djeluju dva elektromagneta, orijentirana pod kutom  $\pm 45^\circ$  u odnosu na vertikalnu ravninu, dobiva se konfiguracija tipičnog radijalnog AML (slika 1.2). Nasuprotno usmjereni elektromagneti rade u tzv. diferencijalnom načinu rada čiji je princip detaljnije opisan u poglavlju 2.1. Zavojnice su namotane na polove feromagnetske jezgre koja je napravljena od lameliranih mekih limova i čine elektromagnetski aktuator, dok se feromagnetski lamelirani rotorski dio AML posebnim spojnim elementima povezuje na osovinu. Na taj se način osigurava nesmetani tok magnetskog polja, smanjenje vrtložnih struja te naposljetku stvaranje potrebnih magnetskih sila.

Na slici 1.3 je prikazana standardna konfiguracija rotorskih sustava s AML, koja se sastoji od rotora, dva radijalna AML, jednog aksijalnog AML i motora. Na taj se način osigurava upravljanje četiri radijalna i jednog aksijalnog stupnja slobode gibanja rotora, dok je šesti stupanj (rotacija oko uzdužne osi) reguliran pomoću motora. Ukoliko su očekivana opterećenja u aksijalnom smjeru zanemariva, a sustav posjeduje motor s kotrljajućim ležajevima tada se pridržavanje u tom smjeru provodi pomoću ležaja motora.



Slika 1.2. Shematski prikaz radijalnog AML



Slika 1.3. Standardna konfiguracija rotorskih sustava s AML

### 1.3. Problematika primjene AML s elastičnim rotorima

Osnovni zahtjevi koji se javljaju prilikom izrade svih rotorskih sustava su osiguravanje robusnog, stabilnog i pouzdanog pridržavanja rotora u cijelom rasponu radnih brzina. U slučajevima kada takvi sustavi rade s AML ti se aspekti rješavaju optimalnom sintezom rotora i regulatora te sistematičnim odabirom svih komponenata u povratnoj vezi (položajnih senzora, energetskog pretvarača i elektromagnetskog aktuatora). Ukoliko rotor radi u podkritičnom području njegova se učinkovita stabilizacija može postići primjenom PID regulatora, dok se kao osnova za njegovo modeliranje može primijeniti model točkaste mase ili krutog tijela. U protivnom, za postizanje stabilne i pouzdane levitacije na brzinama vrtnje koje su više od prve kritične brzine potrebno je primijeniti složenije algoritme upravljanja gdje se posebna pažnja posvećuje obradi vibracijskih formi rotorskih sustava, odnosno vlastitih frekvencija pri kojima dolazi do pojave kritičnih brzina. S obzirom da rotor na tim frekvencijama postiže maksimalne vibracijske amplitude od izuzetne je važnosti predviđanje i praćenje ponašanja sustava u uvjetima rezonancije. To je razmatranje obavezno kod rotora koji za vrijeme svog pokretanja nužno prolaze kroz kritične brzine prije postizanja tražene radne brzine vrtnje.

Osim spomenutih zahtjeva, postoje dva dodatna razloga zbog kojih AML sustavi s elastičnim rotorima iziskuju povećani napor prilikom projektiranja pripadnih regulatora. Prvi je razlog to što elastični rotor ima svojstveno širi frekvencijski raspon od krutog rotora te traži poznavanje dinamičkog ponašanja regulatora i na višim frekvencijama. Drugi razlog proizlazi iz konfiguracije sustava, tj. u slučajevima kada su senzori i aktuatori dislocirani duž uzdužne osi rotora<sup>1</sup> postojat će elastične forme čiji je modalni čvor (sjecište forme vibriranja s osi u kojoj je amplituda pomaka jednaka nuli) smješten između parova sensor/aktuator (detaljnije u poglavlju 4.2). To predstavlja poseban dinamički problem ako se njihove pripadne vlastite frekvencije nalaze unutar frekvencijskog raspona regulatora. Prilikom projektiranja regulatora za elastične rotorske sustave moraju se razmotriti oba zahtjeva.

### 1.4. Pregled dosadašnjih istraživanja

U ovom je poglavlju iznesen kratak pregled dosadašnjih saznanja i spoznaja na području aktivnih magnetskih ležajeva, pri čemu je naglasak stavljen na istraživanja vezana za

---

<sup>1</sup> Pojava dislociranosti senzora i aktuatora duž uzdužne osi rotora je poznatija pod nazivom nekolokacija (engl. *non-collocation*)

problematiku primjene elektromagnetski oslonjenih elastičnih rotora i pripadnim metodama upravljanja.

#### 1.4.1. Počeci istraživanja AML tehnologija

Prvi teorijski rad koji predstavlja osnovu magnetskog pridržavanja izdao je Earnshaw (1842). U tom radu autor razmatra potencijalne načine beskontaktnog pridržavanja dvaju tijela te dolazi do slijedećeg zaključaka: unutar magnetskog polja koje se stvara fiksnim rasporedom magneta nemoguće je osigurati stabilnu pasivnu levitaciju tijela u svih šest stupnjeva slobode gibanja ([1], [2]).

Prema Habermanu i Liardu [3] počeci razvoja tehnologije AML vezuju se za patente fokusirane na pasivnu magnetsku levitaciju (1850.). Međutim, pozivanjem na gore spomenuti Earnshawov teorem, takvi su se sustavi pokazali problematičnima pri pozicioniranju tijela i postizanju stabilnosti. Interpretaciju Earnshawovog teorema je 1939. objavio Braunbeck. Prema njemu, izuzetak kojim se pobija spomenuti teorem predstavljaju diamagnetski materijali koji posjeduju magnetsku permeabilnost manju od jedan ( $\mu_r < 1$ ), tj. sposobnost odbijanja vanjskog magnetskog polja čime se omogućava nastanak stabilnih, ali slabih i tehnički neprimjenljivih magnetskih sila [4]. Stvaranje jakih sila primjenom permanentnih magneta može se omogućiti pomoću supravodljivih materijala ( $\mu_r = 0$ ) pri kojima se magnetsko polje istiskuje iz supravodiča primjenom Meissnerovog efekta i na taj način omogućuje stabilna levitacija. S druge strane, stabilna levitacija tijela na sobnoj temperaturi koja svoju primjenu pronalazi i u industrijskim ležajevima može se dobiti uvođenjem aktivno reguliranih elektromagneta pomoću kojih se magnetsko polje kontinuirano prilagođava s ciljem održavanja konstantnog referentnog položaja oslonjenog tijela. U skladu s tom idejom 1937. su plasirana dva različita prijedloga primjene magnetskih ležajeva u dva posve različita područja, transport (Kemper, 1937.) i eksperimentalna fizika (Beams, 1937.) [5].

Najraniji patenti koji su direktno utjecali na brži razvoj aktivnih magnetski ležajeva proizlaze iz 1930-ih kada su započela istraživanja metoda za pročišćavanje izotopa različitih elemenata. Jedna od metoda uključuje ultracentrifuge koje rade u vakuumu na veoma visokim brzinama. 1937. Beams, profesor fizike na Sveučilištu Virginia, započeo je s istraživanjem levitacije malih čeličnih kuglica (reda veličine promjera 1 mm) s ciljem određivanja čvrstoće materijala. U sklopu tog istraživanja postignute su vrlo velike brzine vrtnje, sve dok pri brzini od 18 milijuna okr/min (300 kHz) uslijed velikih centrifugalnih sila nije došlo do pucanja kuglice. U tim najranijim istraživanjima radijalni stupnjevi slobode gibanja su se stabilizirali pasivno dok je aksijalni smjer (obično vertikalni) bio reguliran aktivno. Sa spomenutim istraživanjima je pokazano da se, unatoč svojstveno nestabilnoj prirodi, stabilna pasivna

levitacija može postići ukoliko se barem jedan stupanj slobode gibanja regulira aktivno, što je ujedno predstavljalo dodatno proširenje Earnshawovog teorema.

Iako su raniji istraživači postavili temelje za uspješnu levitaciju, tehnološka i ekonomska isplativost primjene AML za pridržavanje rotacijskih strojeva postaje moguća tek nakon pojave mikroprocesora koji su omogućili digitalnu implementaciju regulatora (Schweitzer, 1976, Haberman & Liard, 1979). Daljnjim napretkom tehnologije povećana je dostupnost raznih alata za modeliranje dinamike i upravljanje kao i napredniji hardver za elektroniku uslijed čega je posljednjih godina izdano i mnogo radova na temu razvoja sistematičnih metoda za projektiranje AML regulatora. Slijedi krati prikaz značajnih radova vezanih za tu tematiku.

Schweitzer i Lange (1976) su objavili rad koji opisuje značajke magnetskih ležajeva za aktivno upravljanje vibracija te dali relaciju između vektora struje i vektora sile aktuatora [6]. Bleuer i Schweitzer (1983) su opisali primjenu AML u pridržavanju krute osovine [7], dok je 1984. Bleuer prezentirao metodu za projektiranje decentraliziranog PD upravljanja krutih rotora<sup>2</sup> [8].

Prema McCallunu [9] 1974. se pojavljuje prvi rad koji obrađuje aktivno upravljanje elastičnih rotora [10], gdje je istražen utjecaj AML kao aktivnog prigušivača na konvencionalno pridržavani elastični rotor. Salm i Schweitzer [11] su 1984. istražili primjenu reduciranih modela rotora u projektiranju sustava u zatvorenom krugu. Oni su pokazali da nemodelirane više forme rotora mogu dovesti do nestabilnosti, što se može spriječiti ukoliko su aktuator i senzor kolocirani, tj. smješteni na istom položaju duž uzdužne osi rotora. Takav se sustav u idealnom slučaju može poistovjetiti s ekvivalentnim sustavom pasivne opruge i prigušivača na položaju magnetskog aktuatora. Salm (1988) je uveo PD (engl. *Proportional Derivative*) regulator za elastične rotore s kolokacijom i definirao uvjete stabilnosti u slučaju kontinuiranog upravljanja [12]. Takav je regulator pokazao veoma dobra svojstva čak i u slučaju nemodeliranja dinamike viših elastičnih formi vibriranja te robusnu stabilnost pod djelovanjem giroskopskog utjecaja.

Herzog (1991) je gore spomenuti AML sustav identificirao kao poseban slučaj pasivnog upravljanja<sup>3</sup> te pokazao da takvi regulatori, osim što imaju loša svojstva prilikom uklanjanja poremećaja, iskazuju i upitnu stabilnost prilikom digitalne implementacije. U potrazi za

---

<sup>2</sup> U kontekstu AML rotor se smatra krutim ukoliko se sve njegove elastične forme vibriranja nalaze iznad gornje granice frekvencijskog raspona sustava.

<sup>3</sup> AML sustavi stabilizirani s idealnim PD regulatorom čine pasivni sustav. Takvi sustavi nemaju nestabilnih polova te su uvijek stabilni u povratnoj vezi, čak i uz prisustvo giroskopskog efekta.

rješenjem spomenutih nedostataka pasivnog upravljanja Herzog je teoretski istraživao moguće karakteristike AML regulatora uz  $H_\infty$  optimizaciju [13]. Za predefimirane strukture, bolji rezultati nego u slučaju PD i PID (engl. *Proportional Integral Derivative*) metoda, mogu se dobiti primjenom SPOC-D (engl. *Structure-Predefined Optimal Control for Discrete Systems*) algoritma kojeg je razvio Larsonneur [14]. Tom metodom nastaju regulatori niskog reda. Primjenjiva je na elastične rotore, ali ne uzima u obzir eksplicitno razmatranje giroskopskog utjecaja. Problem određivanja stabilnog regulatora za veoma elastičan rotor s nekolokacijom i giroskopskim utjecajem bio je jedan od predmeta istraživanja Gählera (1998). On je razvio računalni algoritam koji se temelji na faznom oblikovanju prijenosne funkcije regulatora pomoću podešavanja nula i polova [15].

#### 1.4.2. Metode projektiranja regulatora za AML sustave

U ovom su poglavlju prikazane metode projektiranja regulatora za AML sustave s elastičnim rotorima, s naglaskom na najvažnije i najperspektivnije algoritme.

U poznate, ali rijetko primjenjivane metode upravljanja se ubrajaju: SPOC-D algoritam [14], metoda mjesta korijena polova [15], LQG (engl. *Linear Quadratic Gaussian*) metoda i sl. Međutim, niti jedna od spomenutih metoda nije imala mogućnost postati standardnom metodom za projektiranje AML sustava. Osim toga, nelinearna metoda klizanja (engl. *sliding mode control*) je istraživana od strane mnogih autora, kao što su npr. [16] i [17]. Glavna prednost metode leži u značajnom smanjenju utroška snage. Ova metoda ima potencijala za obećavajuću primjenu i u budućnosti, ali zahtijeva daljnja istraživanja vezana za neriješene probleme sprječavanja pobude slabo prigušenih elastičnih formi.

U metode koje, prema današnjim saznanjima, imaju najviše potencijala za primjenu na upravljanje AML sustava ubrajaju se PID regulatori s pripadnim filtrima te moderne metode kao što su  $H_\infty$  i  $\mu$ -sinteza [5], [18]. Iako u mnogim primjenama osiguravaju robusnost, primjenom PID regulatora se može postići samo decentralizirano upravljanje pri kojem se zanemaruje nekolokacija aktuatora i senzora [19]. Osim toga, ovim pristupom nastaju jednostavniji regulatori koji obično ne uzimaju u obzir specijalne zahtjeve složenijih sustava i zbog toga ne garantiraju njihovu stabilnost. Pri tome, s obzirom da u elastičnim strukturama zbog prisutnih poremećaja u sustavu može doći do destabilizacije njima svojstvenih i slabo prigušenih vibracijskih formi, zadovoljavajući odziv se može postići samo u ograničenom frekvencijskom rasponu sustava. Kako bi se učinkovitost regulatora poboljšala isti se obično proširuje s niskopropusnim filtrima kojima se uklanjaju šumovi mjerenja i poboljšava robusnost te s *notch* filtrima koji sprječavaju pobudu viših formi vibriranja [20], [21]. Osim toga, ukoliko se u razmatranje mora uzeti i nekolokacija senzora i aktuatora stabilnost sustava

ostaje i dalje narušena. Kako bi se prevladali nedostaci dugotrajnog ručnog podešavanja zbog još uvijek nepostojećeg sistematičnog alata za tu namjenu, spriječila pobuda određenih elastičnih formi te riješili problemi povezani s nekolokacijom mnoga su istraživanja usmjerena na proširenje standardnog PID regulatora s naprednijom metodom upravljanja, kao što je LQG ili u potpunosti na primjeni modernijih metoda upravljanja, kao što su  $H_\infty$  ili  $\mu$ -sinteza. Cilj je postići učinkovitije podešavanje i implementaciju metode s kojom bi se postigao stabilan odziv u što kraćem vremenu i u različitim režimima rada. Za razliku od PID regulatora pri kojem se podešavanje parametara može provesti iterativno na stvarnom sustavu, tijekom projektiranja robusnih regulatora potrebno je poznavati model sustava zbog čega postignuta svojstva regulatora direktno ovise o točnosti modela. S obzirom da je nemoguće da neki model posve točno opisuje pripadni stvarni sustav u svim fazama rada koncepti  $H_\infty$  i  $\mu$ -sinteza metoda dopuštaju uzimanje u obzir nesigurnosti sustava (grešaka modeliranja, promjena parametara sustava i sl.) direktno u proces projektiranja regulatora. Na taj način nastaju regulatori koji su robusni na nesigurnosti koje su bile razmatrane u procesu njegovog modeliranja. Za razliku od njih, koncept LQR metode se temelji samo na početnom modelu sustava koji ne uzima u obzir moguće varijacije sustava zbog čega daje optimalne rezultate samo u uvjetima koji su postojali u trenutku projektiranja regulatora. Dane tvrdnje su potvrđene i u [22] na primjeru jednostavnog modela alata alatnog stroja za glodanje, gdje su prikazani različiti utjecaji te dana usporedba PID, LQR i  $\mu$ -sinteze na ponašanje zatvorenog sustava u frekvencijskoj domeni.

U radu [23] provedena je paralelna implementacija PID i LQG metoda upravljanja na AML sustav s elastičnim rotorom. Direktnu implementaciju LQG regulatora na nestabilni sustav s elastičnim rotorom je otežano provesti iz dva razloga. Prvo, LQG je algoritam, koji je veoma osjetljiv na greške modela. Drugo, težinske funkcije elastičnih formi direktno utječu na nestabilne krute forme vibriranja. Iz tog se razloga sustav najprije stabilizira s PID regulatorom i nakon toga proširuje s njemu paralelnim LQG regulatorom koji prigušuje rezonantne frekvencije već stabilnog sustava. Važnost primjene različitih metoda upravljanja za stabilizaciju krutih i elastičnih formi vibriranja istaknuta je i u radovima [24], [25], gdje se primjenjuje PID algoritam za levitaciju i stabiliziranje krutih formi u kombinaciji s LQ algoritmom koji uklanja vibracije povezane s elastičnim formama te u radu [26] gdje se LQG algoritam nadopunjuje s faznom kompenzacijom za krute forme.

S obzirom da je glavni nedostatak LQG metode nedostatak robusnosti, težnja je da se za upravljanje AML sustava sve više primjenjuje  $H_\infty$  metoda, kao predstavnik modernijih metoda upravljanja. Prve primjene  $H_\infty$  metode upravljanja se javljaju oko 1990, gdje je prvi rad koji je fokusiran na praktičnu implementaciju te metode na magnetski oslonjenu elastičnu gredu izdao Fujita sa suradnicima [27]. Vezano za  $H_\infty$  metodu, mogu se razlikovati dva

osnovna pristupa projektiranja, pristup temeljen na oblikovanju prijenosnih funkcija i pristup temeljen na signalima. Ukoliko se oblikovanje provodi u otvorenom krugu često korištena metoda je tzv. Glover-McFarlane  $H_\infty$  metoda, koju su 1989. uveli Glover i McFarlane [28] i koja je svoju primjenu našla i na području AML [29], [30]. S druge strane, oblikovanje prijenosnih funkcija u zatvorenoj petlji dovodi do  $H_\infty$  metode mješovite osjetljivosti (engl. *mixed sensitivity method*), gdje se mnogi radovi za implementaciju te metode oslanjaju na primjeni dvije težinske funkcije koje se određuju na temelju empirijskih pretpostavki [31], [32]. S druge strane,  $H_\infty$  pristup temeljen na signalima je veoma učinkovita metoda za sustave s više varijabli, ali nepraktična zbog potrebe za ručnim podešavanjima mnogih težinskih funkcija. S obzirom da to često vodi i do otežanog postizanja tražene stabilnosti i smanjenih svojstava sustava u zatvorenom krugu mnoga se istraživanja bave modernijim pristupima podešavanja, kao što su neuronske mreže [33], genetski algoritmi [34] ili posebne optimizacijske metode, npr. LMI (engl. *Linear Matrix Inequality*) [35]. Osim toga, treba obratiti pozornost na to da se pri ugradnji  $H_\infty$  metode mogu pojaviti numerički problemi kao posljedica složene dinamike sustava. Za postizanje robusnih karakteristika sustava s obzirom na razne perturbacije u sustavu može se primijeniti i algoritam pod nazivom  $\mu$ -sinteza, koji direktno u proces projektiranja regulatora uključuje nesigurnosti. Međutim, takvi regulatori su uglavnom visokog reda što može dovesti do nepostizanja konvergencije rješenja. Glavni nedostatak svih robusnijih metoda je visoki red regulatora koji se njima postiže te su stoga razvijene razne metode redukcije [36], [37], [38]. Osim navedenih metoda, u novije vrijeme postoje i pokušaji razvoja robusnih PID regulatora, gdje se s ciljem podešavanja pojačanja može primijeniti proširena Lagrangeova metoda optimizacije roja čestica (*Augmented Lagrangian Particle Swarm Optimization*, ALPSW) [39]. Analiza se temelji na istovremenom zadovoljavanju višestrukih kriterija  $H_\infty$  svojstava, koji su računalno teško rješivi primjenom postojećih metoda. S obzirom da je ALPSW stohastička metoda, ovo je jedan od pokušaja te su potrebna daljnja istraživanja s ciljem poboljšanja konvergencije.

## 1.5. Ciljevi i struktura disertacije

S obzirom na postojeću problematiku koja se neizbježno javlja kod elastičnih rotorskih sustava s AML, glavni su ciljevi ovog rada izrada cjelovitog numeričkog modela na temelju kojeg će se dobiti uvid u njihove karakteristike te projektiranje i implementacija metode upravljanja koja će omogućiti stabilan rad rotora iznad prve kritične brzine. Na temelju razmatranja elastičnih rotora oslonjenih na AML i pripadnih metoda upravljanja, uočeno je da se optimalne karakteristike i učinkovitost postižu primjenom robusnih metoda upravljanja. Međutim, te metode se temelje na složenom matematičkom modelu i često dovode do regulatora visokog reda. S druge strane, PID regulatori su još uvijek jedan od



najprimjenjivijih regulatora u industriji te, unatoč nedostatne robusnosti, osiguravaju zadovoljavajuće ponašanje mnogih praktičnih sustava. Kombinacijom pozitivnih strana obje spomenute strategije upravljanja u ovom je radu provedena integracija klasičnog (PID) i robusnog upravljanja. Pojedini međukoraci koji vode do ostvarenja spomenutih ciljeva, a istovremeno i do znanstvenog doprinosa ovog rada su slijedeći:

- Razviti numerički model elastičnog rotora oslonjenog na AML koji omogućuje modeliranje rotacijskih strojeva i provođenje sljedećih dinamičkih analiza: analizu formi vibriranja s ciljem utvrđivanja položaja modalnog čvora između senzora i aktuatora, tj. analize modela s aspekta nekolokacije, određivanje dijagrama ovisnosti krutosti ležaja o brzini vrtnje te izrada Campbellovog dijagrama. Nakon provedenih dinamičkih analiza neoslonjenog rotora (rotor bez AML), u programu Matlab/Simulink izraditi modele svih preostalih sastavnih komponenata AML sustava (magnetskih ležajeva, energetskog pretvarača i senzora) koji zajedno s modelom rotora čine cjeloviti model promatranog sustava u zatvorenom krugu.
- Osigurati stabilan rad rotora s izraženim problemima nekolokacije, tj. omogućiti rješavanje problema nestabilnosti koju uzrokuju modalni čvorovi između parova senzor/aktuator na oba AML u nadkritičnom području. To je moguće postići na dva načina: (1) uvesti napredniji regulator ( $H_2$ ,  $H_\infty$  ili  $\mu$ -sintezu) i provesti njegovu implementaciju u stvarnom vremenu, (2) modificirati konfiguraciju sustava (pomicanjem/ dodavanjem diskova ili AML). S obzirom na jednostavnost i učestalost primjene PID algoritma u praksi, ali i ograničenost trenutno dostupne eksperimentalne opreme potrebne za implementaciju novih metoda upravljanja, odabrana je druga opcija i naglasak je dan na pronalaženje sistematičnog pristupa za određivanje primjerenog rasporeda svih AML u smjeru uzdužne osi rotora.
- Po uzoru na zapažanja simulacijskog modela, a s ciljem nesmetanog prelaska preko prve kritične brzine, sastaviti ispitni stol na način da se izbjegnu problemi povezani s nekolokacijom senzora i aktuatora te provesti potrebna mjerenja.
- Numerički model korigirati u skladu s eksperimentalnim mjerenjima provedenim na odabranoj konfiguraciji sustava, proširiti ga s odabranim metodama upravljanja (PID i  $H_\infty$  metoda) te u oba slučaja provesti dinamičku analizu sustava u zatvorenom krugu uslijed prisutnih poremećaja u sustavu, kako u stanju mirovanja tako i prilikom prolaska kroz prvu kritičnu brzinu. Dati usporedbu rezultata simulacije i eksperimentalnih mjerenja.

U skladu s postavljenim ciljevima struktura ove disertacije je slijedeća:

- U **drugom poglavlju** su detaljno opisani matematički modeli svih sastavnih komponenata rotor/AML sustava (magnetskih ležajeva, elastičnog rotora, senzora i

energetskog pretvarača) na temelju kojih će se provesti dinamička analiza ponašanja rotorskog sustava te projektiranje odabranih regulatora. U nastavku je iznesen matematički model vremenskog kašnjenja signala, koje se javlja kao posljedica mrtvog vremena zbog digitalnog uzorkovanja signala i faznog kašnjenja koje je svojstveno prisutno u elektroničkim komponentama. Iako tematika ovog rada ne obrađuje direktno krute rotore, radi cjelovitosti opisa, sažeto je predstavljen i njihov matematički model.

- **Treće poglavlje** sadrži prikaz osnovne teorije upravljanja sustava s povratnom vezom. Iznesen je kratak opis PID metode upravljanja i uvodna teorija u robusno upravljanje. Pri tome je obrađeno slijedeće: modeli nesigurnosti, ciljevi koji se ispituju i zahtijevaju prilikom projektiranja robusnih regulatora (nominalna i robusna stabilnost, nominalne i robusne karakteristike) te postavke  $H_\infty$  metode mješovite osjetljivosti i Glover-MacFarlane  $H_\infty$  metode.
- U **četvrtom poglavlju** je predstavljen i detaljno opisan postupak izrade numeričkog programa za modeliranje i upravljanje elastičnih rotora s nekolokacijom oslonjenih na dva radijalna AML. Za izradu je primijenjen računalni program Matlab/ Simulink. Programski alat obuhvaća gibanje rotora u dvije ravnine te nudi mogućnost analize utjecaja giroskopskog utjecaja. Primjenom takvog simulacijskog modela provedene su dinamičke analize neoslonjenog rotora (analiza formi vibriranja, frekvencijskih odziva te Campbellovog dijagrama) koje su relevantne za ocjenu budućeg ponašanja sustava i procjenu očekivanih kritičnih brzina. Sve simulacije su provedene na primjeru rotorske konfiguracije s kojom se omogućava, kako u simulaciji tako kasnije i u eksperimentalnom modelu, izbjegavanje nepoželjnih problema s nekolokacijom.
- U **petom poglavlju** je opisan eksperimentalni ispitni stol na kojem su provedena eksperimentalna istraživanja i koji je sastavljen na osnovu konfiguracije odabrane u četvrtom poglavlju. Isti se sastoji od dva radijalna AML, elastične spojke, osovine s diskovima te elektromotora. Osim toga, predstavljeni su uvjeti koji su omogućili stabilnu levitaciju i rad u nadkritičnom području te dani rezultati odabranih mjerenja.
- U **šestom poglavlju** su provedene potrebne korekcije simulacijskog modela u skladu s eksperimentalno izmjerenim odzivima sustava u otvorenom krugu. Na temelju provedenih analiza projektirani su regulatori koji se temelje na metodama upravljanja opisanim u trećem poglavlju te prikazana usporedba svojstava regulatora u slučaju raznih pobuda i testiranje na robusnu stabilnost. Upravljanje se provodi na četiri radijalne osi.
- **Sedmo poglavlje** je zaključak u kojem je dan osvrt na izrađeni numerički i eksperimentalni model, pregled svih rezultata i doprinosa ovog istraživanja te prijedlozi za buduća istraživanja u domeni elastičnih rotora oslonjenih na AML.

## Poglavlje 2.

# Modeliranje rotora s AML

Rotorski sustavi s AML su tipični mehatronički sustavi čiji su osnovni sastavni dijelovi: rotor (kruti ili elastični), senzori koji mjere njegov položaj, regulator koji proizvodi regulacijski signal, energetska pretvarač koji generira pripadni strujni signal te elektromagneti koji u skladu s time proizvode magnetsku silu potrebnu za dovođenje rotora u traženi položaj. Općenito govoreći, u kontekstu AML rotor se smatra elastičnim ukoliko postoje elastične forme vibriranja čije vlastite frekvencije leže unutar frekvencijskog raspona regulatora. Osim što mogu biti pobuđene prilikom pokretanja i zaustavljanja rotora mogu se izraziti i u stanju mirovanja (levitacija). U protivnom, ukoliko se vlastite frekvencije svih elastičnih formi rotora nalaze iznad frekvencijskog raspona regulatora isti se naziva krutim.

Kako bi se omogućila analiza dinamičkog ponašanja opisanog sustava i projektirao pripadni regulator, potrebno je odrediti matematički model svih sastavnih komponenata: aktivnih magnetskih ležajeva, elastičnog rotora, senzora i energetske pretvarača. Iako tematika ovog rada ne obrađuje direktno krute rotore, radi cjelovitosti opisa, sažeto je predstavljen i njihov matematički model.

### 2.1. Modeliranje aktivnih magnetskih ležajeva

#### 2.1.1. Modeliranje radijalnih elektromagneta

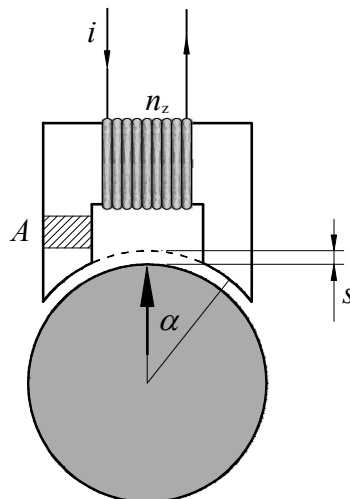
Razmatranjem osnovne geometrije radijalnog elektromagneta prikazane na slici 2.1 te primjenom linearne teorije magnetskih krugova dobiva se sila kojom jedan magnet djeluje na

feromagnetsko tijelo [5]:

$$f_m(s, i) = k \frac{i^2}{s^2}, \quad (2.1)$$

gdje je  $k = 1/4 \cdot \mu_0 n_z^2 A \cos \alpha$  konstanta koja direktno ovisi o geometriji elektromagneta,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am magnetska permeabilnost vakuuma,  $n_z$  broj namotaja zavojnice,  $A$  površina jednog elektromagnetskog pola,  $\alpha$  kut svakog pola u odnosu na simetralu pripadnog elektromagneta (npr. za AML s 8 polova kut  $\alpha = 22,5^\circ$ ),  $i$  jakost struje te  $s$  radijalna zračnost između rotora i magneta. Izraz (2.1) je dobiven uz slijedeće pretpostavke:

- zanemaren je utjecaj magnetizacije željezne jezgre (beskonačna permeabilnost željeza)
- silnice magnetskog toka napuštaju jezgru u radijalnom smjeru, tj. okomito na površinu rotora pri čemu su gubici magnetskog toka zanemarivi



Slika 2.1. Osnovna geometrija elektromagneta

U tehničkoj se praksi rijetko susreću slučajevi sa samo jednim elektromagnetom. Umjesto toga, u postojeći se sustav uvodi dodatni magnet identičan postojećem, ali koji proizvodi silu u nasuprotnom smjeru. U takvoj konfiguraciji u smjeru svake osi na rotor istovremeno djeluju pozitivne i negativne sile zbog čega se, postiže i bolje upravljanje dinamike rotora. Većina takvih sustava radi u tzv. diferencijalnom načinu rada, pri čemu se jedan od elektromagneta u paru napaja sumom statičke struje (engl. *bias current*)  $i_0$  koja pridržava rotor pri nazivnoj zračnosti  $s_0$  i struje regulacije  $i_x$  ( $i_1 = i_0 + i_x$ ), a drugi njihovom razlikom ( $i_2 = i_0 - i_x$ ). U tom slučaju udaljenosti između rotora i magneta iznose  $s_1 = s_0 - x$  i  $s_2 = s_0 + x$ , gdje je  $x$  pomak rotora uslijed djelovanja struje upravljanja  $i_x$ . Uz dane uvjete i

primjenom izraza (2.1), ukupna sila kojom sustav od dva nasuprotna elektromagneta djeluje na rotor dobiva se kao razlika njihovih pripadnih sila, odakle (npr. za os  $x$ , slika 1.2) proizlazi:

$$f_{\text{mx}} = f_{\text{mx}^+} - f_{\text{mx}^-} = k \left[ \frac{(i_0 + i_x)^2}{(s_0 - x)^2} - \frac{(i_0 - i_x)^2}{(s_0 + x)^2} \right]. \quad (2.2)$$

Iako je radijalna sila jednog elektromagneta svojstveno nelinearna, u većini se realnih slučajeva zadovoljavajuće upravljanje postiže primjenom linearnih metoda upravljanja čija je primjena mnogo jednostavnija. U tom je slučaju potrebno poznavati linearni model sile u području oko radne točke  $(s_0, i_0)$ , odnosno traženog ravnotežnog položaja. Linearizacijom izraza (2.2) uz pretpostavku da je rotor u radnom položaju centriran između magneta ( $x = 0$ ,  $i_x = 0$ ), dobiva se

$$f_{\text{mx}} = k_s \cdot x + k_i \cdot i_x, \quad (2.3)$$

gdje su koeficijenti

$$k_s = 4k \frac{i_0^2}{s_0^3} \quad \text{i} \quad (2.4)$$

$$k_i = 4k \frac{i_0}{s_0^2}$$

poznatiji pod nazivom koeficijent sila-pomak i koeficijent sila-struja, respektivno. Koeficijent  $k_s$  djeluje poput negativne krutosti te predstavlja glavni razlog nestabilnosti rotora s AML u otvorenom krugu. To znači da bez aktivnog upravljanja ( $i_x = 0$ ) ukupna magnetska sila u svakom trenutku djeluje u smjeru pomaka i udaljuje tijelo od ravnotežnog položaja. U tom slučaju čak i najmanje odstupanje od ravnotežnog položaja  $s_0$  rezultira naglim porastom/smanjenjem pomaka  $x$  što naposljetku dovodi do udara rotora u magnet ili njegovog pada. Takvo je ponašanje u potpunoj suprotnosti s djelovanjem konvencionalne mehaničke opruge te se njegova stabilnost može ostvariti samo uvođenjem aktivnog upravljanja.

U većini praktičnih sustava s radijalnim AML (slika 1.2) krutost ležaja je jednaka u smjeru obje osi gibanja ( $x$  i  $y$ ), zbog čega se dinamika rotora opisuje istim koeficijentima  $k_s$  i  $k_i$  u oba promatrana smjera. Osim s aspekta jednostavnosti, ta je činjenica direktno povoljna i s aspekta dinamike rotora jer se pri simetričnom pridržavanju rotora uklanja mogućnost pobude natražnih formi vibriranja sa silama neuravnoteženja. Iako je izraz (2.3) samo linearna aproksimacija stvarnog ponašanja, i stoga točan samo u blizini radne točke, tj. isključivo u

slučajevima kada magnetski ležaj radi ispod granice zasićenja, pokazalo se da daje dobre rezultate u mnogim praktičnim primjenama. Samo kod izuzetno nelinearnih slučajeva, kao što su npr. kontakt rotora i statora, zasićenje magnetskog toka i sl., koji mogu dovesti do neprihvatljivo velikih pomaka rotora ili porasta struje u zavojnici elektromagneta, zahtijeva se primjena detaljnijeg nelinearnog modela.

### 2.1.2. Dinamički model koncentrirane mase na AML

Na temelju linearnog modela elektromagnetskog ležaja (2.3) te primjenom 2. Newtonovog zakona gibanje koncentrirane mase  $m$  s jednim stupnjem slobode gibanja se može opisati dinamičkom jednadžbom:

$$k_s \cdot x + k_i \cdot \dot{x} = m\ddot{x}. \quad (2.5)$$

Laplaceovom transformacijom dobiveni se dinamički model (2.5) može preurediti i zapisati u obliku sustava drugog reda<sup>4</sup>

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{k_i}{ms^2 - k_s}, \quad (2.6)$$

čiji su polovi

$$p = \pm \sqrt{\frac{k_s}{m}}. \quad (2.7)$$

S obzirom da jedan od njih leži na pozitivnoj realnoj osi Laplaceove ravnine, direktno se zaključuje da je AML sustav u otvorenoj petlji nestabilan. U slučaju radijalnih magnetskih ležajeva s dva stupnja slobode gibanja isti se postupak provodi u oba radijalna smjera.

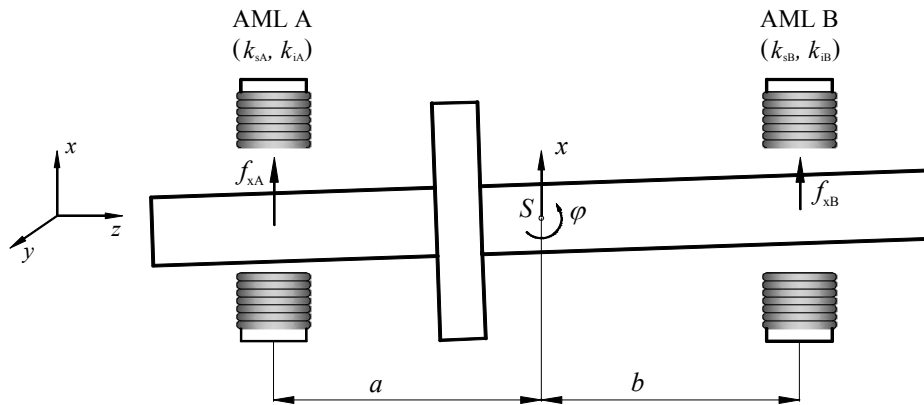
## 2.2. Modeliranje sustava AML i krutog rotora

Model krutog rotora na AML se izvodi na temelju shematskog prikaza danog na slici 2.2. Pomaci rotora su opisani pomoću translacijskih i kutnih pomaka njegovog težišta, što potvrđuje činjenicu da se ovim modelom mogu predvidjeti samo gibanja rotora u obliku

---

<sup>4</sup> U teoriji regulacije Laplaceov operator se uobičajeno označava sa malim tiskanim slovom  $s$ .

krutog tijela, poznatije pod nazivom cilindrična i konična forma. Ova je analiza ograničena samo na rotor u mirovanju.



Slika 2.2. Kruti rotor oslonjen na dva radialna AML

U danim se uvjetima dinamika centra mase rotora u  $x$ - $z$  ravnini može opisati slijedećim dinamičkim jednadžbama:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= f_{xA} + f_{xB} - \tilde{m}g \\ J_y\ddot{\varphi} &= -f_{xA}a + f_{xB}b \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdje je  $m$  ukupna masa rotora,  $x$  pomak težišta rotora  $S$ ,  $f_{xA}$  i  $f_{xB}$  magnetske sile u ležajevima A i B definirane izrazom (2.8),  $\tilde{m}g$  težina rotora koja djeluje u smjeru osi  $x$ ,  $J_y$  moment inercije rotora oko osi  $y$ ,  $\varphi$  kut zakreta rotora oko težišta, te  $a$  i  $b$  udaljenosti ležajeva od težišta rotora. U tipičnom slučaju kada su osi rotora  $x$  i  $y$  zarotirane za kut  $\pm 45^\circ$  u odnosu na vertikalnu ravninu  $\tilde{m}g = mg/\sqrt{2}$  za obje ravnine ( $x$ - $z$  i  $y$ - $z$ ). U matričnom zapisu jednadžbe (2.8) glase:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{sA} & 0 \\ 0 & k_{sB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{iA} & 0 \\ 0 & k_{iB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{m}g \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Za male kutne pomake te primjenom jednostavnih geometrijskih relacija koje opisuju ovisnost pomaka u ležajevima i pomaka centra mase:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a+b}(x_B a + x_A b) \\ \varphi &= \frac{1}{a+b}(x_B - x_A) \end{aligned}, \quad (2.10)$$

sustav (2.9) je moguće u potpunosti prevesti na koordinate ležajeva:

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_3 \\ m_3 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{sA} & 0 \\ 0 & k_{sB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{iA} & 0 \\ 0 & k_{iB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a & b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{m}g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

gdje vrijedi

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{b^2 m + J_y}{(a+b)^2} \\ m_2 &= \frac{a^2 m + J_y}{(a+b)^2}, \\ m_3 &= \frac{abm - J_y}{(a+b)^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dobiveni sustav opisuje dinamiku krutog rotora prilikom levitacije na AML ali se može primijeniti i za modeliranje svake krute grede u jednoj ravnini pod istim uvjetima. Ukoliko rotor vrši rotacijsko gibanje javlja se sprezanje gibanja između ravnina  $x$ - $z$  i  $y$ - $z$  te giroskopski moment, zbog čega se model (2.11) mora preoblikovati i proširiti za nove režime rada.

Ukoliko se pretpostavi da su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  rješenja problema vlastitih vrijednosti (na sustav ne djeluju vanjske sile kao što su sila aktuatora i sila gravitacije) dobiva se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_3 \\ m_3 & m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{sA} & 0 \\ 0 & k_{sB} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

S obzirom da je svaki pol sustava jednak vlastitoj frekvenciji sustava, slijedi:

$$p_{1,2} = \pm \lambda_1, \quad p_{3,4} = \pm \lambda_2. \quad (2.14)$$

Na taj se način dolazi do zaključka da AML sustav s krutim rotorom u otvorenoj petlji pri gibanju u jednoj ravnini ima četiri simetrično raspoređena pola na realnoj osi Laplaceove ravnine od kojih su dva nestabilna. U slučaju kada se gibanje rotora promatra u dvije međusobno okomite ravnine, pod pretpostavkom da je rotor osnosimetričan, a krutosti ležajeva simetrične, broj se polova udvostručuje, tj. sustav ima osam polova od kojih su četiri nestabilna.



## 2.3. Modeliranje sustava AML i elastičnih rotora

Stvarni rotori (rotori turbostrojeva, pumpi, vretena alatnih strojeva i sl.) su u većini slučajeva elastični kontinuirani sustavi s beskonačnim brojem stupnjeva slobode gibanja. Analitički opis njihovog dinamičkog ponašanja se može dobiti iz rješenja skupa parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Međutim, kako se ono može odrediti samo u najjednostavnijim slučajevima, za modeliranje i vibracijsku analizu rotora su razvijene numeričke metode od kojih se najčešće primjenjuje metoda konačnih elemenata (MKE). Osnovni koncept MKE metode se temelji na diskretizaciji kontinuirane strukture na manje elemente poznate geometrije pomoću koje se složene parcijalne diferencijalne jednačbe zamjenjuju s običnim diferencijalnim jednačbama. Osnovna jednačba gibanja za analizu dinamike rotora glasi:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (2.15)$$

gdje je  $\mathbf{q}$  vektor čvornih pomaka,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{G}$  i  $\mathbf{K}$  su globalne matrice masa, prigušenja, giroskopskog utjecaja i krutosti,  $\mathbf{f}$  je vektor vanjskih sila, a  $\Omega$  je brzina vrtnje rotora.

U sljedećem je poglavlju iznesen opis MKE metode za analizu rotorskih sustava. Nakon toga slijedi detaljan prikaz postupka kreiranja reduciranog modela te zapis istog u obliku modela prostora stanja. Smanjenje reda modela je naročito važno iz razloga što je red robusnih regulatora obično jednak ili veći od reda modela sustava za koji se projektiraju [36].

### 2.3.1. Model rotora primjenom metode konačnih elemenata (MKE)

Većina modela rotorskih sustava se sastoji od homogene elastične osovine i diskova, čije se fleksijsko dinamičko ponašanje može opisati pomoću MKE metode ukoliko su ispunjeni slijedeći uvjeti:

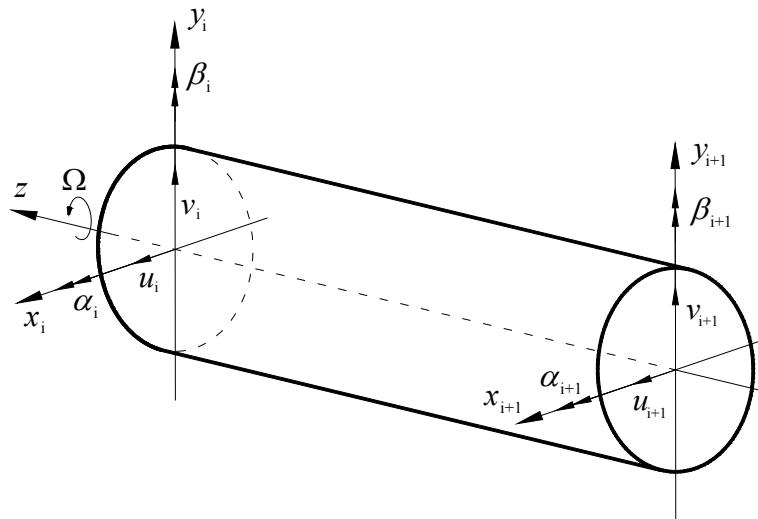
- amplitude pomaka rotora su male u odnosu na dimenzije rotora
- rotor je osnosimetričan
- svi parametri sustava su vremenski nepromjenljivi
- brzina rotacije se smatra konstantnom
- zanemaruju se torzijske vibracije i aksijalni pomaci rotora
- unutarnje prigušenje rotora se modelira kao jednostavno proporcionalno prigušenje (strukturno prigušenje)
- svi senzori i aktuatori se mogu povezati s diskretnim točkama na strukturi

Poštivanjem navedenih uvjeta elastična se osovina može uspješno modelirati primjenom cilindričnih Euler-Bernoullijevih grednih konačnih elemenata, dok se diskovi smatraju krutim tijelima. Broj konačnih elemenata direktno ovisi o potrebnom broju čvorova, pri čemu se u svakom modelu čvorovi, osim na slobodnim krajevima osovine, definiraju na položajima u kojima postoje diskovi te na položajima u kojima djeluje sila ili se mjeri pomak. Ukoliko je potrebno oni se mogu definirati i u dodatnim točkama kako bi se poboljšala kvaliteta modela.

### 2.3.1.1. Konačni element za prostornu analizu dinamike rotora

Za opis jednog elementa za prostornu analizu dinamike rotora koristi se gredni konačni element koji se temelji na Euler-Bernoullijevoj gredi, a uzima u obzir rotacijsku inerciju i giroskopski efekt unutar segmenta grede [40]. Na taj se način omogućuje analiza savijanja rotirajuće cilindrične grede u dvije ortogonalne ravnine. Svaki element  $e$  je opisan duljinom  $l_e$ , krutošću na savijanje  $EI_e$  te masom po jedinici duljine  $\mu_e$ . Elementi su međusobno povezani čvorovima od kojih svaki ima dva translacijska (pomaci  $u_i$  i  $v_i$  u smjeru osi  $x_i$  i  $y_i$ ) i dva rotacijska (rotacije  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  oko osi  $x_i$  i  $y_i$ ) stupnja slobode gibanja po čvoru (Slika 2.3. 2.3). Vektor čvornih pomaka jednog grednog elementa s dva čvora  $i$  i  $i+1$  glasi:

$$\mathbf{q}_e = [u_i \quad v_i \quad \alpha_i \quad \beta_i \quad u_{i+1} \quad v_{i+1} \quad \alpha_{i+1} \quad \beta_{i+1}]^T \quad (2.16)$$



Slika 2.3. Gredni konačni element za prostornu analizu dinamike rotora

Definiranjem Lagrangeove funkcije  $L_e = E_k - E_p$ , gdje su  $E_k$  i  $E_p$  kinetička i potencijalna energija elementa u ovisnosti o pripadnim funkcijama oblika i rubnim uvjetima, te primjenom Lagrangeovih jednadžbi druge vrste dobiva se jednadžba gibanja konačnog elementa s konstantnom brzinom vrtnje  $\Omega$ :

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \Omega \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e, \quad (2.17)$$

gdje je  $\mathbf{M}_e$  matrica mase konačnog elementa,  $\mathbf{G}_e$  matrica giroskopskog efekta konačnog elementa i  $\mathbf{K}_e$  matrica krutosti konačnog elementa. Iste su definirane na slijedeći način:

$$\mathbf{M}_e = \frac{\mu_e l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & & & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & & & & \\ 0 & -22l_e & 4l_e^2 & & & & & & \\ 22l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & & & & & \\ 54 & 0 & 0 & 13l_e & 156 & & & & \\ 0 & 54 & -13l_e & 0 & 0 & 156 & & & \\ 0 & 13l_e & -3l_e^2 & 0 & 0 & 22l_e & 4l_e^2 & & \\ -13l_e & 0 & 0 & -3l_e^2 & -22l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & \end{bmatrix}, \quad (2.18.)$$

$$\mathbf{G}_e = \frac{J_{pe}}{30l_e} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ -36 & 0 & & & & & \text{anti} & \text{sim} & \\ 3l_e & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 3l_e & -4l_e^2 & 0 & & & & & \\ 0 & -36l_e & 3l_e & 0 & 0 & & & & \\ 36 & 0 & 0 & 3l_e & -36 & 0 & & & \\ 3l_e & 0 & 0 & -l_e^2 & -3l_e & 0 & 0 & & \\ 0 & 3l_e & l_e^2 & 0 & 0 & -3l_e & -4l_e^2 & 0 & \end{bmatrix}, \quad (2.19.)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI_e}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & & & \\ 0 & -6l_e & 4l_e^2 & & & & & & \\ 6l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6l_e & 12 & & & & \\ 0 & -12 & 6l_e & 0 & 0 & 12 & & & \\ 0 & -6l_e & 2l_e^2 & 0 & 0 & 6l_e & 4l_e^2 & & \\ 6l_e & 0 & 0 & 2l_e^2 & -6l_e & 0 & 0 & 4l_e^2 & \end{bmatrix}, \quad (2.20.)$$

pri čemu je:  $J_{pe} = \mu_e r_e^2 / 2$  dinamički moment inercije konačnog elementa polumjera  $r_e$  oko uzdužne osi.

Detaljniji postupak razvoja MKE modela rotora se može pronaći u [40], dok literatura [41] daje općeniti i veoma informativan prikaz MKE metode za različite inženjerske probleme.

### 2.3.1.2. Kruti diskovi

Mnogi elementi rotacijskog stroja se mogu modelirati kao diskovi čija se elastičnost zanemaruje u odnosu na masu. Na taj se način diskovi smatraju krutim tijelima koja se smještaju u čvorove. Ukoliko rotor miruje diskovi utječu samo na matricu mase sustava, dok se u slučaju kada rotira s konstantnom kutnom brzinom  $\Omega$  javlja sprežanje gibanja između ravnina  $x$ - $z$  i  $y$ - $z$  zbog giroskopskog efekta. Matrice mase i giroskopskog efekta diska iznose redom:

$$\mathbf{M}_{Di} = \begin{bmatrix} m_{Di} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{Di} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{dDi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{dDi} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{G}_{Di} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{pDi} \\ 0 & 0 & -J_{pDi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

gdje je  $m_{Di}$  masa  $i$ -tog diska, a  $J_{dDi}$  i  $J_{pDi}$  dinamički momenti inercije mase diska oko poprečne i uzdužne osi.

### 2.3.1.3. Ležajevi

Ukoliko se pretpostavi da je rotor oslonjen na radijalnim aktivnim magnetskim ležajevima, njihovo se djelovanje na rotorski sustav opisuje u obliku vanjskih sila definiranih izrazom (2.3). Pri tome matrice koeficijenata sila-struja i sila-pomak, uz pretpostavku da je krutost ležaja jednaka u smjeru obje osi gibanja, za jedan AML glase:

$$\mathbf{K}_{si} = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} k_i & 0 \\ 0 & k_i \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Ukupna elektromagnetska sila u matričnom obliku glasi:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{K}_s \mathbf{q} + \mathbf{K}_i \mathbf{i}. \quad (2.25)$$



(2.21) i (2.22), respektivno, za svaki postojeći disk superponiraju u pripadne globalne matrice dimenzija  $4N \times 4N$  i to na položaje koji su povezani s translacijskim i rotacijskim stupnjevima slobode gibanja onih čvorova u koje su ugrađeni diskovi. Postupak slaganja matrica krutosti i matrica mase u pripadne globalne matrice je detaljnije prikazan u radu [42].

S obzirom da je rotor oslonjen na AML u osnovnu jednadžbu gibanja (2.26) potrebno je uključiti vanjske sile ležajeva  $\mathbf{f}_a$  definirane izrazom (2.25) te prema potrebi pobudu zbog vanjskih sila, npr. sila neuravnoteženja  $\mathbf{f}_u$  nakon čega se dobiva proširena jednadžba:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Omega\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_s)\mathbf{q} = \mathbf{K}_i\mathbf{i} + \mathbf{f}_u, \quad (2.29)$$

koja čini osnovnu dinamičku jednadžbu gibanja elastičnog rotora oslonjenog na AML.

### 2.3.2. Modalna dekompozicija

Primjenom metode modalne dekompozicije MKE model rotora se može prevesti u oblik prikladniji za dinamičku analizu i projektiranje upravljačkog algoritma. Prvi korak se sastoji od transformacije jednadžbe gibanja (2.26) iz fizičkih u modalne koordinate primjenom supstitucije

$$\mathbf{q} = \Phi\boldsymbol{\eta}, \quad (2.30)$$

gdje je  $\boldsymbol{\eta}$  vektor modalnih koordinata, a  $\Phi$  modalna matrica koja sadrži vlastite vektore  $\boldsymbol{\varphi}_i$  poredane na način da su njihove pripadne vlastite vrijednosti  $\omega_i$  monotono rastuće:

$$\Phi = \left[ \left\{ \boldsymbol{\varphi}_1 \right\} \cdots \left\{ \boldsymbol{\varphi}_i \right\} \right]. \quad (2.31)$$

U slijedećem se koraku dobivena jednadžba množi s lijeva sa  $\Phi^T$  odakle naposljetku proizlazi:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \Omega\tilde{\mathbf{G}}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\eta} = \Phi^T\mathbf{f}, \quad (2.32)$$

uz

$$\tilde{\mathbf{M}} = \Phi^T\mathbf{M}\Phi, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \Phi^T\mathbf{K}\Phi, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \Phi^T\mathbf{G}\Phi. \quad (2.33)$$

S obzirom da su matrice  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  simetrične, nove matrice  $\tilde{\mathbf{M}}$  i  $\tilde{\mathbf{K}}$  imaju dijagonalnu strukturu. Osim toga, ukoliko se vektori  $\boldsymbol{\varphi}_i$  normaliziraju s obzirom na masu, tj. na način da  $\tilde{\mathbf{M}}$  postane jedinična matrica, tada su sustavi definirani jednadžbom (2.32) manje skloni numeričkim problemima prilikom projektiranja regulatora. U tom slučaju vrijedi:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{I}, \quad (2.34)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_1^2 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Nadalje, ukoliko se pretpostavi da je rotorska struktura slabo prigušena u sustav se može uključiti jednostavno proporcionalno prigušenje, dodavanjem kojeg se jednadžba (2.32), može zapisati u obliku:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\tilde{\mathbf{D}} + \Omega \tilde{\mathbf{G}}) \dot{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\mathbf{K}} \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}, \quad (2.36)$$

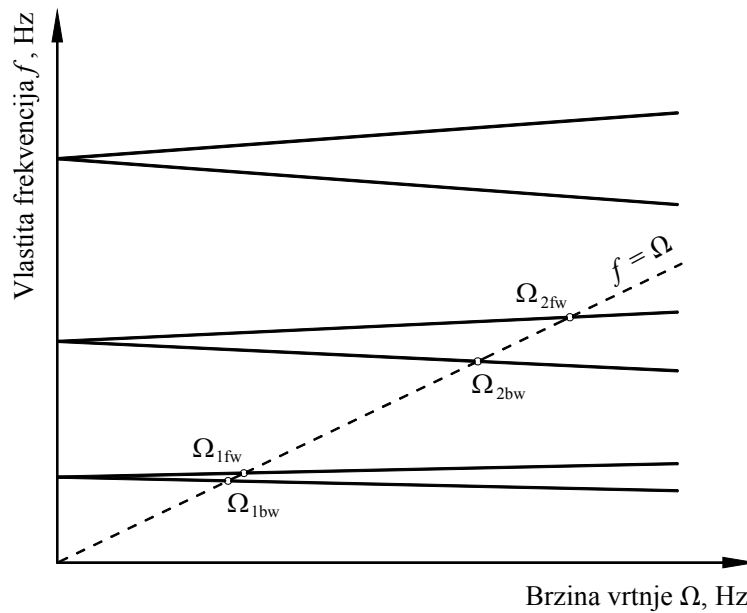
gdje je matrica prigušenja  $\tilde{\mathbf{D}}$  također dijagonalna matrica:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2\xi_1 \omega_1 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

pri čemu je  $\xi_i$  omjer prigušenja  $i$ -te forme vibriranja. U slučaju da rotori posjeduju veliko unutarnje prigušenje, npr. u laminiranom djelu, za opis prigušenja se mora primijeniti složeniji model. S obzirom da se metodom modalne dekompozicije transformacija iz fizičkih koordinata  $\mathbf{q}(t)$  na modalne koordinate  $\boldsymbol{\eta}(t)$  provodi pomoću modalne matrice, svaka jednadžba predstavlja gibanje jedne forme vibriranja.

Pod pretpostavkom da rotor miruje ( $\Omega = 0$ ) gibanja u dvije međusobno okomite ravnine su u potpunosti nespregnuta te rotor posjeduje dvije jednake vlastite forme vibriranja. Kada rotor započinje rotaciju ta se dvostruka forma rastavlja na dvije, poznatije pod nazivom napredna i natražna precesija. U prvom slučaju (napredna precesija) smjer rotacije formi je jednak smjeru rotacije rotora dok se njihove vlastite frekvencije povećavaju s brzinom vrtnje. U drugom slučaju (natražna precesija) smjer orbita formi je suprotan smjeru rotacije rotora, a njihove pripadne vlastite frekvencije se smanjuju s brzinom vrtnje. Relacija između brzine vrtnje rotora i vlastitih frekvencija se najčešće prikazuje Campbellovim dijagramom (slika

2.4), odakle se na sjecištu prvog harmonika brzine vrtnje s vlastitim frekvencijama mogu očitati pripadne kritične brzine.



**Slika 2.4.** Campellov dijagram neoslonjenog elastičnog rotora ( $\Omega_{fw}$ ,  $\Omega_{bw}$  su kritične brzine vezane redom uz naprednu i natražnu formu)

### 2.3.3. Modalna redukcija

Glavna je prednost modalnog zapisa to što omogućuje jednostavno smanjenje reda sustava, tj. uklanjanje onih formi vibriranja koje imaju zanemariv utjecaj na ponašanje sustava. U tu se svrhu mogu primijeniti različite metode koje se temelje na upravljivosti (engl. *controllability*) i mjerljivosti (engl. *observability*) [5]. Međutim, u slučaju rotora čiji je model izveden u ovom poglavlju i može se opisati jednadžbom (2.26) dovoljno je provesti jednostavno uklanjanje nepotrebnih formi s višim frekvencijama. To znači da se, s obzirom da su u inženjerskoj praksi od izuzetne važnosti samo niže vibracijske forme, nakon provedene modalne dekompozicije iz modela rotora uklanjaju one čiji je utjecaj na ponašanje sustava zanemariv i koje ne ulaze u frekvencijski raspon odziva rotora zbog niskopropusnih karakteristika senzora, filtra i energetskog pretvarača. Ovo je naročito bitno kod regulatora čije se projektiranje temelji na modelu sustava.

Iz toga slijedi da se stupci modalne matrice  $\Phi$  (2.31) čije se pripadne frekvencije nalaze izvan frekvencijskog raspona sustava mogu jednostavno ukloniti iz modela. Ukoliko je samo prvih  $r$  vlastitih vektora bitno za ponašanje sustava nova reducirana modalna matrica  $\Phi_r$  ima  $r$  stupaca te se transformacija u modalne koordinate, umjesto s matricom  $\Phi$ , provodi s



reduciranom matricom  $\Phi_r$ . Kao rezultat redukcije matricne jednadžbe 2.36 nastaje model nižeg reda:

$$\ddot{\eta}_r + (\tilde{\mathbf{D}}_r + \Omega \tilde{\mathbf{G}}_r) \dot{\eta}_r + \tilde{\mathbf{K}}_r \eta_r = \Phi_r^T \mathbf{f}, \quad (2.38)$$

koji ima veoma slično ponašanje kao i puni model opisan jednadžbom (2.36).  $\eta_r$  je reducirani vektor modalnih koordinata,  $\tilde{\mathbf{D}}_r$ ,  $\tilde{\mathbf{G}}_r$  i  $\tilde{\mathbf{K}}_r$  su reducirane modalne matrice prigušenja, giroskopskog efekta i krutosti.

Na isti se način transformacijom jednadžbe gibanja rotora oslonjenog na AML (2.29) u modalne koordinate dobiva:

$$\ddot{\eta}_r + (\tilde{\mathbf{D}}_r + \Omega \tilde{\mathbf{G}}_r) \dot{\eta}_r + (\tilde{\mathbf{K}}_r - \tilde{\mathbf{K}}_{sr}) \eta_r = \tilde{\mathbf{K}}_{ir} \mathbf{i} + \Phi_r^T \mathbf{f}_u, \quad (2.39)$$

gdje vrijedi:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{sr} = \Phi_r^T \mathbf{K}_s \Phi_r, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{ir} = \Phi_r^T \mathbf{K}_i. \quad (2.40)$$

Rezultirajuća matrica krutosti  $\tilde{\mathbf{K}}_r - \tilde{\mathbf{K}}_{sr}$  nije u potpunosti dijagonalna, ali su dijagonalni elementi značajno veći nego ostali elementi. Iz tog razloga krutost AML u najvećoj mjeri utječe na krute forme čija je vlastita frekvencija u rubnim uvjetima bez AML jednaka nuli

#### 2.3.4. Model prostora stanja elastičnog rotora oslonjenog na AML

Moderne metode upravljanja se u većini slučajeva temelje na modelima prostora stanja. Uvođenjem vektora stanja koji sadrži modalne koordinate,  $\mathbf{x} = [\eta_r \quad \dot{\eta}_r]^T$ , modalna jednadžba (2.39) koja definira gibanje rotora u dvije ravnine se može zapisati u standardnom obliku jednadžbe stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_a \mathbf{i} + \mathbf{B}_u \mathbf{f}_u, \quad (2.41)$$

gdje je  $\mathbf{A}$  matrica sustava,  $\mathbf{B}_a$  i  $\mathbf{B}_u$  su ulazne matrice struje ležajeva  $\mathbf{i}$  i vanjskih sila  $\mathbf{f}_u$ , definirane na slijedeći način:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{K}}_r + \tilde{\mathbf{K}}_{sr} & -(\tilde{\mathbf{D}}_r + \Omega \tilde{\mathbf{G}}_r) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ir} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_r^T \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

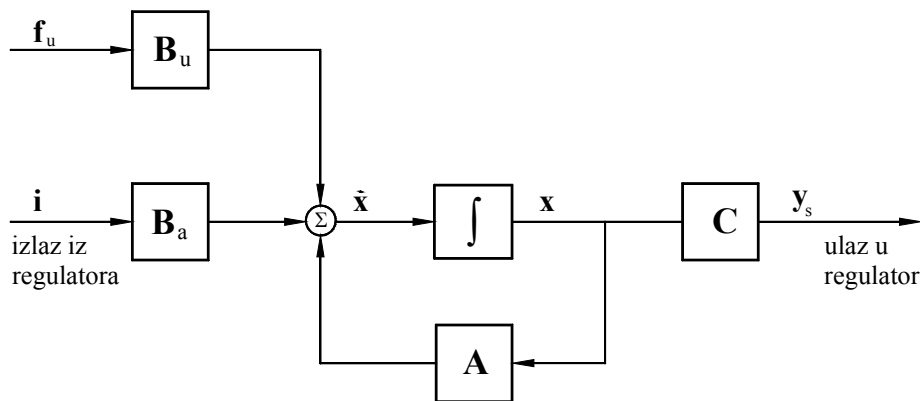
Uz pretpostavku da je  $\mathbf{y}_s$  vektor izmjerenih pomaka na položaju senzora, traženi izlaz iz sustava glasi:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{T}_s \mathbf{q} = \mathbf{T}_s \Phi_r \boldsymbol{\eta}_r, \quad (2.43)$$

gdje je  $\mathbf{T}_s$  Booleanova matrica s nulama i jedinicama koja preslikava pomake na odgovarajuće stupnjeve slobode gibanja. U tim uvjetima izlazna jednadžba glasi:

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{C} \mathbf{x} = [\mathbf{T}_s \Phi_r \quad \mathbf{0}] \mathbf{x}. \quad (2.44)$$

Na slici 2.5 je dan blokovski prikaz modela prostora stanja na temelju kojeg se omogućuje primjena raznih metoda upravljanja, pri čemu vektori  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{y}_s$  predstavljaju izlaz i ulaz iz regulatora [5].



Slika 2.5. Model AML rotorskog sustava u prostoru stanja

## 2.4. Model senzora

Senzor mjeri fizičke pomake rotora te ih pretvara u naponski signal koji ulazi u regulator. U tehnologijama s AML sustavima danas se primjenjuju različite vrste položajnih senzora, kao što su induktivni senzori, senzori na temelju vrtložnih struja (engl. *eddy current*), kapacitivni i Hallovi senzori. Općenito govoreći, svi senzori posjeduju konačan mjerni frekvencijski raspon zbog čega se njihove karakteristike mogu najtočnije opisati

niskopropusnim filtrom prvog reda, odnosno prijenosnom funkcijom koja se definira kao odnos izlaznog napona iz senzora i izmjenjenog pomaka [43]:

$$G_{\text{senz}}(s) = K_{\text{senz}} \frac{1}{\frac{s}{\omega_{\text{senz}}} + 1}, \quad (2.45)$$

gdje je  $K_{\text{senz}}$  osjetljivost senzora, a  $\omega_{\text{senz}} = 2\pi f_{\text{senz}}$ ,  $f_{\text{senz}}$  je granična frekvencija (engl. *cut-off frequency*). Nakon provođenja kondicioniranja signala, ova je prijenosna funkcija jednaka za sve četiri diferencijalne osi mjerenja. U posebnim slučajevima kada senzori imaju veoma dobra linearna svojstva s malim faznim zaostajanjem unutar dovoljno velikog mjernog raspona (koji je u pravilu mnogo veći od frekvencije uzorkovanja sustava) za modeliranje senzora se može primijeniti samo konstanta jednaka njegovoj osjetljivosti  $K_{\text{senz}}$ .

## 2.5. Model energetskog pretvarača

U većini AML sustava ugrađeni su energetski pretvarači sa utisnutom strujom. Frekvencijski odziv pretvarača se može odrediti eksperimentalno: uvođenjem poremećaja (npr. šumova ili sinusnog *sweep* signala) u otvoreni AML sustav bez upravljanja i mjerenjem pripadne struje u zavojnicama. Pripadni matematički model pretvarača se može tražiti u obliku prijenosne funkcije drugog reda, kao omjer izlazne struje i ulaznog napona:

$$G_{\text{amp}}(s) = K_{\text{amp}} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_{\text{amp}}^2} + 2\zeta_{\text{amp}} \frac{s}{\omega_{\text{amp}}} + 1}, \quad (2.46)$$

pri čemu je  $K_{\text{amp}}$  pojačanje,  $\omega_{\text{amp}} = 2\pi f_{\text{amp}}$ ,  $f_{\text{amp}}$  je granična frekvencija i  $\zeta_{\text{amp}}$  prigušenje energetskog pretvarača. Svi se koeficijenti dobivaju usklađivanjem s eksperimentalno određenim frekvencijskim odzivom. Prilikom izrade matematičkog modela za osam pretvarača (dva po stupnju slobode gibanja) dovoljno je modelirati četiri prijenosne funkcije  $G_{\text{amp}}(s)$ . To je moguće iz razloga što je dinamika pretvarača nasuprotnih elektromagneta gotovo identična uslijed čega je u sustav dovoljno uključiti samo jednu prijenosnu funkciju po osi koja predstavlja oba pretvarača na promatranoj osi.

## 2.6. Kašnjenje signala

Svaka komponenta u mehatroničkom sustavu (senzor, energetska pretvarač, regulator) uvodi vremensko kašnjenje izlaznog u odnosu na ulazni signal. Uzrok te pojave može biti mrtvo vrijeme (engl. *time delay*) zbog digitalnog uzorkovanja signala ili fazno kašnjenje koje se javlja kao posljedica fizičkog kašnjenja u komponentama. Kako bi se omogućilo modeliranje njegovog utjecaja isti se mora opisati ekvivalentnim dinamičkim sustavom konačnog reda. U tu svrhu najčešće korišteni model je Padèova aproksimacija kojom se točna prijenosna funkcija kašnjenja  $e^{-\tau s}$  aproksimira racionalnom funkcijom:

$$e^{-\tau s} = \frac{1 - k_1 s + k_2 s^2 + \dots \pm k_n s^n}{1 + k_1 s + k_2 s^2 + \dots + k_n s^n}, \quad (2.47)$$

gdje je  $n$  red aproksimacije o kojem direktno ovise koeficijenti  $k_i$  (tablica 2.1). Što je veći red aproksimacije model postaje složeniji, a raspon frekvencija unutar kojih je aproksimacija ispravna širi.

**Tablica 2.1.** Koeficijenti Padèove aproksimacije za redove  $n = 1$  i  $n = 2$

Red aproksimacije, $n$	Koeficijenti, $k_i$
$n = 1$	$k_1 = \tau/2$ , preostali $k_i = 0$
$n = 2$	$k_1 = \tau/2$ , $k_2 = \tau^2/12$ , preostali $k_i = 0$

## Poglavlje 3.

# Regulatori za elastične rotore s AML

Za upravljanje industrijskih sustava s AML uobičajeno se primjenjuje PID metoda upravljanja. Takvi sustavi iskazuju dobre karakteristike u mnogim primjenama te su gotovo optimalni u slučaju upravljanja krutih rotora. Ukoliko se PID regulator proširi s niskopropusnim filtrima kojima se uklanjaju šumovi mjerenja i poboljšava robusnost te pojasno nepropusnim filtrima s uskim pojasom prigušenja (engl. *notch filter*) koji sprječavaju pobudu viših formi vibriranja, isti mogu biti učinkoviti i u sustavima s elastičnim rotorima. Međutim, ukoliko se u razmatranje mora uzeti i nekolokacija senzora i aktuatora, tj. njihova dislociranost duž uzdužne osi rotora stabilizacija sustava se može ostvariti u posebnim uvjetima. U tom se slučaju npr. povoljnim rasporedom svih masa (diskova i AML) duž uzdužne osi rotora ili dobrim poznavanjem teorije upravljanja te uz mogućnost implementacije u stvarnom vremenu (engl. *real-time implementation*) može izbjeći modalni čvor između senzora i aktuatora. Osim toga, PID regulatori su svojstveno ograničeni i sa svojom strukturom zbog čega je u slučaju elastičnih rotora s AML koji su u većini slučajeva MIMO sustavi otežano opisati sustav skupom SISO prijenosnih funkcija. Kako bi se prevladali nedostaci spomenute metode mnoga se istraživanja bave zamjenom standardnog PID regulatora s naprednijim metodama upravljanja kao što su  $H_\infty$  ili  $\mu$ -sinteza. To su metode u kojima se postupak projektiranja regulatora bazira na matematičkom modelu sustava te su u engleskoj literaturi poznatije pod nazivom *model-based* metode.

U ovom je poglavlju iznesen kratak opis PID metode upravljanja i uvodna teorija u robusno upravljanje. Detaljan izvod teorije robusnog upravljanja daleko je izvan dometa ovog rada. Prikazano je samo nekoliko aspekata koji su povezani s praktičnom primjenom koja slijedi naknadno, a koja uključuje modeliranje nesigurnosti, ciljeve koji se ispituju i

zahtijevaju prilikom projektiranja robusnih regulatora (nominalna i robusna stabilnost, nominalne i robusne karakteristike) te postavke  $H_\infty$  metode mješovite osjetljivosti i Glover-MacFarlane  $H_\infty$  metode. Detaljnije informacije o metodi robusnog upravljanja se mogu pronaći u brojnim literaturama koje obrađuju tu tematiku, kao što su [36], [44], [45] i [46].

### 3.1. PID upravljanje

Upravljački signal PID regulatora,  $u_{\text{PID}}(t)$  glasi:

$$u_{\text{PID}}(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (3.1)$$

odnosno

$$u_{\text{PID}}(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (3.2)$$

gdje je:

$e(t)$  – greška signala

$K_p$  – proporcionalno pojačanje regulatora

$K_I = K_p/T_i$  – integracijsko pojačanje regulatora

$K_D = K_p T_d$  – derivacijsko pojačanje regulatora

Može se uočiti da PID regulator obuhvaća neophodna dinamička ponašanja pomoću kojih se može riješiti neki problem upravljanja: promjena dinamike sustava (proporcionalni dio), povećanje upravljačkog signala kako bi se uklonila odstupanja u stacionarnom stanju (integracijski dio) te brzu reakciju na naglu promjenu pogreške (derivacijski dio).

Kako bi se ostvarilo stabilizirajuće djelovanje PID regulatora na proces potrebno je podesiti njegove parametre. Pri tome se ukoliko je simulacijski model poznat mogu primijeniti postupci podešavanja primjenom minimuma integralnih kriterija [47] koji u sebi uključuju traženje minimuma slijedećeg izraza:

$$J = \int_0^{\infty} t^n f[e(t)] dt, \quad (3.3)$$

gdje je  $e(t)$  pogreška signala, a  $f[e(t)]$  funkcija greške signala.

Na taj se način relativno jednostavno opisuje odstupanje prijelaznog odziva realnog sustava od zadanog idealnog procesa, za koji se obično uzima proces jedinične skokovite funkcije ili eksponencijalni proces sa zadanim parametrima. S obzirom da funkcija pogreške može biti linearna ili nelinearna integralne ocjene kvalitete se mogu podijeliti na linearne i nelinearne.

*Linearne integralne ocjene kvalitete:*

Linearna ocjena kvalitete je jednaka površini ispod krivulje  $e(t)$  te se definira funkcijom oblika:

$$J_0 = \int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s), \quad (3.4)$$

gdje je  $E(s)$  Laplaceova transformacija od  $e(t)$ .

Ovaj pristup u svim procesima ne daje ispravna rješenja jer zbog mogućih poništavanja pozitivnih i negativnih površina ispod signala mali iznos  $J_0$  ne mora nužno značiti da je pogreška mala. Složenija integralna ocjena kvalitete se može predstaviti funkcijom:

$$J_{01} = \int_0^{\infty} e(t) t^m dt = (-1)^m \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^m E(s)}{ds^m}. \quad (3.5)$$

Općenito govoreći, primjena linearnih ocjena kvalitete je ograničena samo na monotone procese pri kojima ne postoji mogućnost poništavanja površina signala ispod i iznad vremenske osi, kao što bi bio slučaj kod oscilatornih sustava.

*Nelinearne integralne ocjene kvalitete:*

Nelinearne integralne ocjene kvalitete kao podintegralnu funkciju  $f[e(t)]$  koriste nelinearne funkcije pogreške, kao što su apsolutne vrijednosti ili kvadrati pogreške signala. Na taj se način uklanjaju gore navedeni nedostaci linearnih pokazatelja. Ako se kao

funkcional koristi apsolutni iznos pogreške dobiva se *IAE* (engl. *Integral of Absolute Error*) kriterij definiran na slijedeći način:

$$J_{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt . \quad (3.6)$$

S obzirom da se u početnim trenucima prijelaznog procesa očekuju veće pogreške, opravdano je da se iste u početnom trenutku uzimaju s manjom težinom te da im se s vremenom pridodaje sve veća težina. To se može postići ako se apsolutni iznos pogreške pomnoži s varijablom vremena pri čemu se dobiva *ITAE* (engl. *Integral of Time multiplied by Absolute Error*) kriterij definiran kao:

$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt . \quad (3.7)$$

Stoga se *ITAE* kriterij primjenjuje kada su važne pogreške u ustaljenom stanju, tj. njihovo uklanjanje, jer će one kako vrijeme prolazi biti sve više terećene.

Osim navedenih, postoje i integralni kvadratni kriteriji npr. integralna kvadratna ocjena *ISE* (engl. *Integral of Squared Error*):

$$J_{ISE} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt , \quad (3.8)$$

koja se vrlo često koristi kao kriterij sinteze optimalnih parametara sustava kada se naglasak želi staviti na velike pogreške koje se žele umanjiti. Pri tome manji iznos integrala  $J_{ISE}$  odgovara prijelaznom procesu s većim prigušenjem i manjim regulacijskim odstupanjem.

Ukoliko se takve pogreške u početnim trenucima žele manje otežati može se primijeniti *ITSE* (engl. *Integral of Time multiplied by Squared Error*) kriterij čiji je oblik:

$$J_{ITSE} = \int_0^{\infty} t e^2(t) dt . \quad (3.9)$$

Manji iznosi kriterija ( $J_{IAE}$ ,  $J_{ITAE}$ ,  $J_{ISE}$ ,  $J_{ITSE}$ ) upućuju na manji iznos pogreške. Sumarni prikaz svih iznesenih nelinearnih integralnih kriterija je dan u obliku tablice 3.1.



Osim navedenih, u slučajevima kada prijelazni proces ima veliku oscilacije, kao mjera kvalitete sustava se može primijeniti poboljšana integralna kvadratna ocjena:

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left[ e^2(t) + \tau_1^2 \left( \frac{de(t)}{dt} \right)^2 \right] dt. \quad (3.10)$$

Navedeni integral  $J_1$  se sastoji iz dva dijela, integrala  $J_{ISE}$  i integrala  $de(t)/dt$ . To znači da se minimiziranjem  $J_1$  dobiva ne samo brži proces već i smanjenje oscilacije prijelaznog procesa.  $\tau_1$  je vremenska konstanta o kojoj ovisi kvaliteta odziva procesa; uz viši iznos  $\tau_1$  prijelazni proces je sporiji i sa smanjenim oscilacijama. Obično se zadaje u granicama:

$$\frac{t_s}{6} < \tau_1 < \frac{t_s}{3}, \quad (3.11)$$

gdje je  $t_s$  vrijeme ustaljivanja procesa.

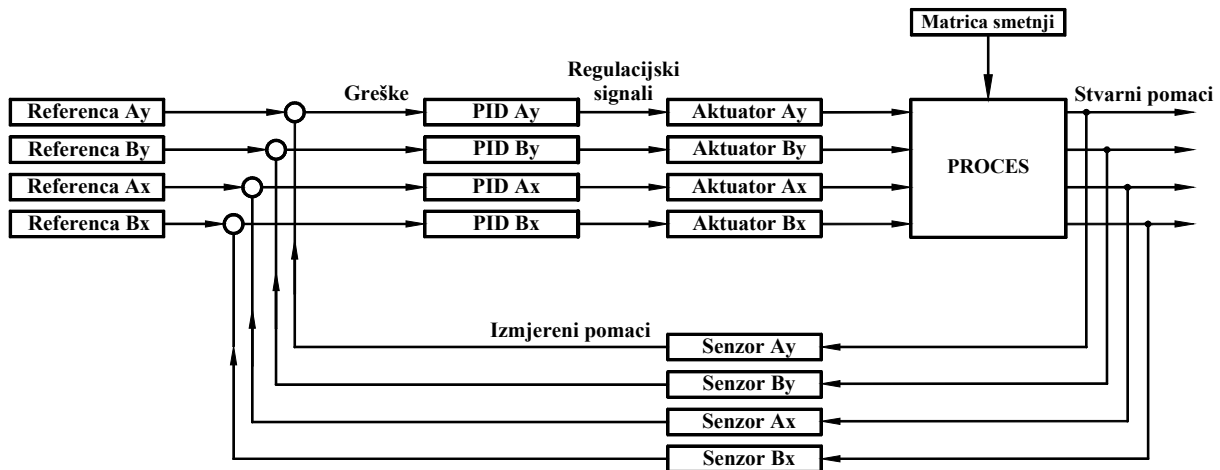
**Tablica 3.1.** Integralni kriteriji optimalnosti

<i>Integralni kriterij</i>	<i>Funkcija greške signala, <math>f[e(t)]</math></i>	<i>n</i>
<i>IAE</i>	$ e(t) $	0
<i>ITAE</i>	$ e(t) $	1
<i>ISE</i>	$e^2(t)$	0
<i>ITSE</i>	$e^2(t)$	1

Integralne pokazatelje ocjene kvalitete je moguće primijeniti u radu s modernim adaptivnim sustavima upravljanja te za automatsku optimizaciju parametara sustava upravljanja.

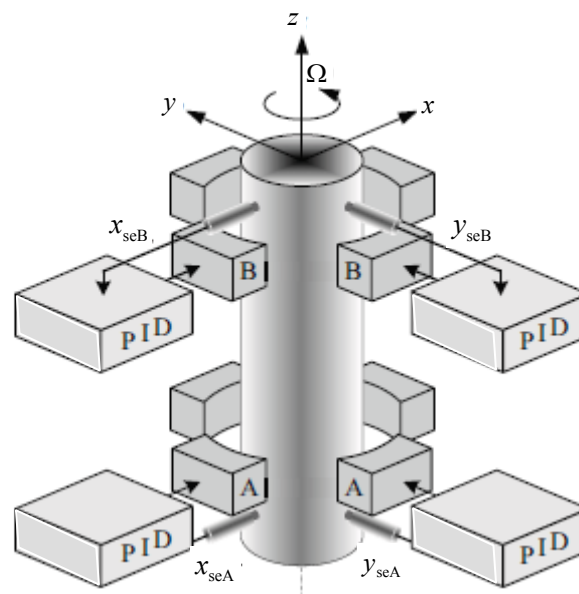
### 3.1.1. PID regulatori za AML

Svaki radijalni AML posjeduje dva senzora za mjerenje pomaka u radijalnim smjerovima i dva aktuatora koji stvaraju odgovarajuće elektromagnetske sile. U općenitom slučaju, rotor oslonjen na AML je tipični MIMO sustav čiji je shematski prikaz za proces s povratnom vezom u zatvorenom krugu prikazan na slici 3.1. Dani proces ima četiri regulacijska ulaza i izlaza (dvije regulacijske osi po svakom AML).

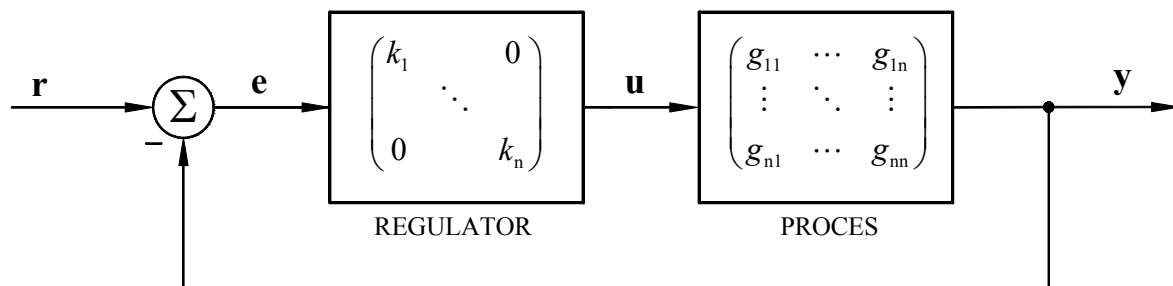


Slika 3.1. Shematski prikaz sheme upravljanja MIMO sustava

Ukoliko se pretpostavi da je interakcija između regulacijskih kanala zanemariva, svaka od ukupno četiri petlje upravljanja sustava se može razmatrati neovisno o drugima. U tom se slučaju centralizirani MIMO sustav može promatrati kao četiri odvojena decentralizirana SISO upravljačka sustava što ujedno predstavlja najjednostavniji pristup u projektiranju regulatora za rotore oslonjene na AML. Isti se sastoji od implementiranja PID sheme upravljanja lokalno za svaki ležaj te odvojeno za svaku os ležaja, kao što je prikazano na fizikalnom sustavu rotora danom na slici 3.2. Decentralizirana shema upravljanja takvog sustava u zatvorenom krugu je dana na slici 3.3, gdje su  $k_1 \dots k_n$  ( $n = 4$ ) prijenosne funkcije PID regulatora u pojedinim SISO petljama.



Slika 3.2. Rotorski sustav s AML s četiri decentralizirana PID regulatora (preuzeto iz [5])



Slika 3.3. Decentralizirana shema upravljanja

Prijenosna funkcija tipičnog idealnog PID regulatora predstavljenog kontinuiranom funkcijom (3.2) po jednoj osi regulacije glasi:

$$G_{\text{PID}}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s. \quad (3.12)$$

S obzirom da idealna derivacijska komponenta regulatora uvodi jednako prigušenje na svim frekvencijama, to bi u praktičnim primjenama rezultiralo pojačavanjem nepoželjnih šumova na visokim frekvencijama. Osim toga, kako je prigušenje učinkovito samo u ograničenom rasponu frekvencija, implementacija se provodi za realni derivacijski član čija je prijenosna funkcija:

$$G_{\text{PIDr}}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{\tau_1 s + 1}. \quad (3.13)$$

U gornjem izrazu  $\tau_1$  je vremenska konstanta koja ograničava frekvencijski raspon djelovanja regulatora.

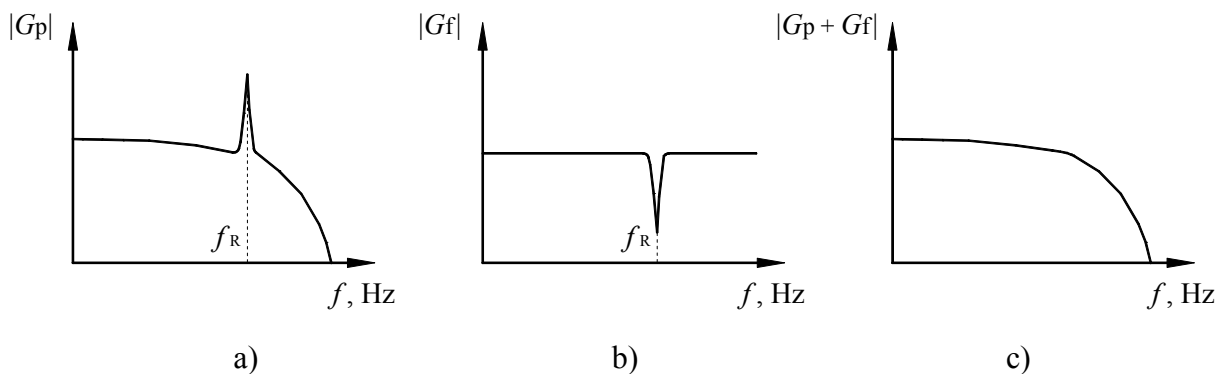
Ukoliko se u nekom trenutku rotor u magnetskom polju giba suprotno od smjera djelovanja gravitacijske sile povećanjem proporcionalnog pojačanja dolazi do smanjenja struje u gornjem i povećanja iste u nasuprotnom elektromagnetu te posljedično do dovođenja rotora u središnji položaj. Pri tome, derivacijsko pojačanje reagira na promjenu brzine rotora, unosi prigušenje u sustav i djeluje stabilizirajuće na njegov odziv. Integralni član se uključuje u sustav kako bi se uklonilo odstupanje u ustaljenom stanju koju proporcionalno i derivacijsko pojačanje ne bi mogli ukloniti.

### 3.1.2. Notch filtri

Prilikom rada s elastičnim rotorima osonjenima na AML čiji se princip upravljanja temelji na PID regulatorima potrebno je dodatno po svakoj osi regulacije implementirati jedan ili više *notch* filtara. Njihovom implementacijom propuštaju se signali svih frekvencija osim oni čija je frekvencija jednaka centralnoj frekvenciji,  $\omega_{\text{notch}}$  (slika 3.4). Tipična prijenosna funkcija takvog filtra glasi:

$$G_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + \omega_{\text{notch}}^2}{s^2 + 2\zeta_{\text{notch}}\omega_{\text{notch}}s + \omega_{\text{notch}}^2}, \quad (3.15)$$

gdje koeficijent  $\zeta_{\text{notch}}$  definira prigušenje, tj. širinu filtra. Gore opisani filtri se definiraju na višim rezonantnim frekvencijama rotora koje bi se mogle pobuditi od upravljačkog signala regulatora tijekom rotacije rotora ili čak u stanju mirovanja te se zbog potpunog nepropuštanja signala na istima ne definiraju na kritičnim frekvencijama koje su niže od tražene radne brzine. Pobuda prve kritične frekvencije se može spriječiti uvođenjem dodatnog prigušenja u sustav, tj. povećanjem derivacijskog pojačanja.



**Slika 3.4.** Frekvencijski odzivi: a) procesa s rezonantnim izdizanjem  $f_R$ , b) *notch* filtra s frekvencijom  $f_R$ , c) zajedničkog odziva procesa i filtra

## 3.2. Opća konfiguracija sustava za robusno upravljanje

Blok dijagram standardne konfiguracije upravljanja s povratnom vezom je prikazan na slici 3.5. Sastoji se od modela procesa koji se regulira  $G$ , regulatora  $K$ , referentnog signala  $r$ , šumova mjerenja  $n$ , ulaznog poremećaja  $d_i$ , izlaznog poremećaja  $d$ , fizičke varijable koja se regulira (pomak)  $y$ , greške pomaka  $e$  i upravljačkog signala  $u$ . U općenitoj konfiguraciji svi signali imaju više varijabli. (Npr. ako se proces sastoji od rotora oslonjenog na dva AML

svaka od varijabli sadrži četiri komponente, koje se vezuju za svaku od dvije osi po ležaju, dok su matrice  $\mathbf{G}$  i  $\mathbf{K}$  dimenzija  $4 \times 4$ ).

Između ulaznih i izlaznih varijabli sustava vrijedi slijedeća matrična relacija:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_o & \mathbf{S}_o & \mathbf{S}_o \mathbf{G} & -\mathbf{T}_o \\ \mathbf{S}_o & -\mathbf{S}_o & -\mathbf{S}_o \mathbf{G} & \mathbf{T}_o \\ \mathbf{K} \mathbf{S}_o & -\mathbf{K} \mathbf{S}_o & -\mathbf{T}_1 & -\mathbf{K} \mathbf{S}_o \\ \mathbf{K} \mathbf{S}_o & -\mathbf{K} \mathbf{S}_o & -\mathbf{S}_1 & -\mathbf{K} \mathbf{S}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{d}_i \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Pri tome je  $\mathbf{S}_o$  matrica prijenosnih funkcija od  $\mathbf{d}$  do  $\mathbf{y}$ , poznatija pod nazivom izlazna matrica osjetljivosti:

$$\mathbf{S}_o = (\mathbf{I} + \mathbf{G} \mathbf{K})^{-1}. \quad (3.17)$$

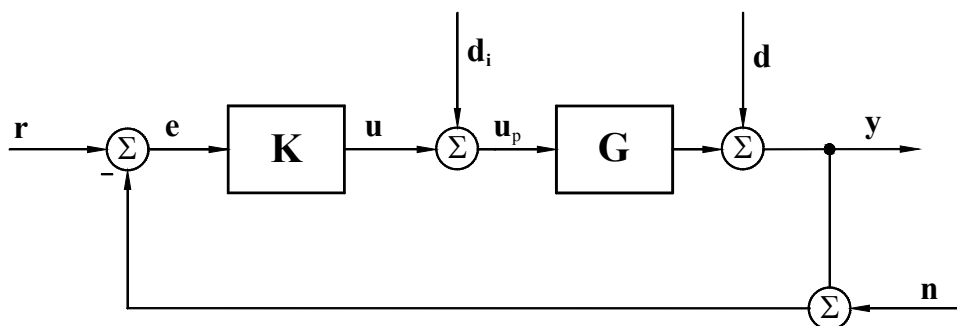
$\mathbf{S}_1$  je ulazna matrica osjetljivosti, tj. matrica prijenosnih funkcija od  $\mathbf{d}_i$  do  $\mathbf{u}_p$ :

$$\mathbf{S}_1 = (\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G})^{-1}, \quad (3.18)$$

dok su izlazna i ulazna matrica komplementarne osjetljivosti  $\mathbf{T}_o$  definirane na slijedeći način:

$$\mathbf{T}_o = \mathbf{I} - \mathbf{S}_o = \mathbf{G} \mathbf{K} \mathbf{S}_o \quad (3.19)$$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{S}_1 = \mathbf{K} \mathbf{G} \mathbf{S}_1. \quad (3.20)$$



Slika 3.5. Standardna konfiguracija sustava upravljanja

Za neki specifični problem konfiguracija prikazana na slici 3.5 se može transformirati u opću konfiguraciju upravljanja koju čine dva sastavna bloka, generalizirani model sustava  $\mathbf{P}$  i regulator  $\mathbf{K}$  (Slika 3.6. ). Pri tome se mogu razlikovati slijedeći signali:

- $\mathbf{u}$  – izlaz iz regulatora
- $\mathbf{w}$  – vanjski utjecaji koji djeluju na zatvoreni sustav, kao što su  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{r}$  i/ili  $\mathbf{n}$
- $\mathbf{v}$  – izmjereni signal
- $\mathbf{z}$  – karakteristične unutarnje varijable sustava, kao što su  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{u}$  i/ili  $\mathbf{y}$  s pripadnim težinskim funkcijama, koje je potrebno minimizirati i koje se odabiru u skladu s ciljevima projektiranja

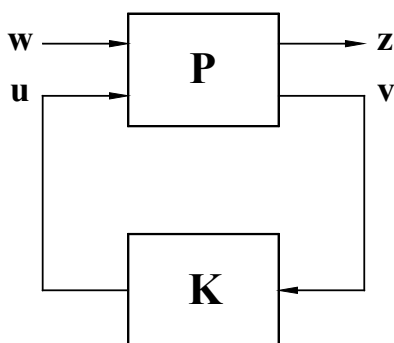
U promatranom sustavu vrijedi relacija:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

gdje je

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

matrica koja sadrži odgovarajuće prijenosne funkcije između pojedinih ulazno-izlaznih parova ( $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ ).



Slika 3.6. Opća konfiguracija sustava upravljanja

Uzimanjem u obzir da signal iz regulatora iznosi  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{v}$ , eliminacijom  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  iz izraza (3.21) dobiva se zatvorena prijenosna funkcija između karakterističnih varijabli sustava  $\mathbf{z}$  i vanjskih ulaza  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{z} = F_1(\mathbf{P}, \mathbf{K})\mathbf{w}, \quad (3.23)$$

gdje je

$$F_1(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{12}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{P}_{21}. \quad (3.24)$$

Ovaj je izraz u literaturi poznatiji pod nazivom donja linearna transformacija razlomka (engl. *lower Linear Fractional Transformation, LFT*) od procesa  $\mathbf{P}$  i regulatora  $\mathbf{K}$ .

Na temelju opće konfiguracije sustava upravljanja može se zaključiti: zadatak optimalne  $H_\infty$  sinteze se sastoji od projektiranja regulatora  $\mathbf{K}(s)$  s kojim se postiže unutarnja stabilnost sustava i uz koji je  $H_\infty$  norma<sup>5</sup> matrice prijenosnih funkcija  $F_1(\mathbf{P}, \mathbf{K})$  definirane izrazom (3.24) minimalna. Međutim, kako to dovodi do numeričkih problema u praksi je minimalnu vrijednost norme  $\|F_1(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty$  uobičajeno otežano pronaći te se problem svodi na rješavanje tzv. suboptimalnog  $H_\infty$  problema, tj. određivanje regulatora  $\mathbf{K}(s)$  uz koji je zadovoljen uvjet:

$$\|F_1(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty < \gamma, \quad (3.25)$$

gdje je  $\gamma > 0$  vrijednost optimizacijskog faktora. Nakon izrade sustava  $\mathbf{P}$ , koji uključuje nominalni model i prikladno odabrane težinske funkcije, provodi se sistematični  $H_\infty$  algoritam koji se temelji na rješavanju dviju Riccati jednadžbi primjenom  $\gamma$ -iteracije čiji su detalji opisani u literaturi [48]. Ukoliko je konačna  $\gamma$  vrijednost niža od jedan to je pokazatelj da je procedura projektiranja uspješno provedena. U protivnom je potrebno detaljnije prilagođavanje sustava, koje obuhvaća modificiranje prisutnih nesigurnosti ili težinskih funkcija koje ga oblikuju.

---

<sup>5</sup>  $H_\infty$  norma stabilne matrice prijenosnih funkcija  $\mathbf{G}(j\omega)$  se definira kao najveća singularna vrijednost duž promatranog frekvencijskog raspona,  $\|\mathbf{G}(j\omega)\|_\infty = \sup \bar{\sigma}[\mathbf{G}(j\omega)]$ . Definicija singularnih vrijednosti za SISO i MIMO sustave je dana u prilogu A.

### 3.3. Nesigurnosti i robusnost sustava

Motivacija za projektiranje robusnih sustava je proizašla iz potrebe opisa i razumijevanja pogrešaka koje su svojstvene matematičkim modelima fizikalnih procesa. Greške modeliranja ili nesigurnosti (engl. *uncertainty*) mogu nastati uslijed nedostatnog poznavanja njegove dinamike kao posljedice složenosti fizikalnog procesa ili uslijed namjernog zanemarivanja određenih karakteristika sustava (npr. dinamike senzora i aktuatora, malih vremenskih kašnjenja) kako bi se smanjila složenost regulatora i olakšala njegova implementacija. Iz tog se razloga u robusnoj regulaciji početni model  $G(s)$  proširuje s eksplicitnim modelima nesigurnosti  $\Delta(s)$  koji opisuju moguća odstupanja matematičkog modela od pripadnog fizikalnog sustava. Pri tome gornja granična vrijednost nesigurnosti mora biti ograničena iz razloga što bilo koji regulator spojen na potpuno nepoznati sustav uvijek može dovesti do nestabilnosti. S obzirom da red stvarnog modela nije poznat, opis modela nesigurnosti u obliku modela prostora stanja nije moguće odrediti. Iz tog je razloga nužno izraditi njihov opis pomoću ulazno-izlaznih veza koje daju minimalne informacije o greškama modeliranja, a koje su dovoljne za testiranje robusne stabilnosti stvarnog sustava. U danim uvjetima nastaje skup perturbiranih modela  $\Pi$  od kojih se očekuje da kvalitetno opisuju realni sustav i pri čemu se smatra da se ponašanje sustava u bilo kojem trenutku može opisati s nekim modelom  $G_p$  iz tog skupa. Temelj robusnog upravljanja leži u projektiranju regulatora za opisani skup modela s ciljem da se zadovolje uvjeti robusne stabilnosti i ostvare željene robusne karakteristike sustava (detaljnije u poglavlju 3.4).

U slijedećem je poglavlju iznesen kratak opis nesigurnosti grupiranih u slijedeće skupine: parametarske, nestrukturirane i strukturirane.

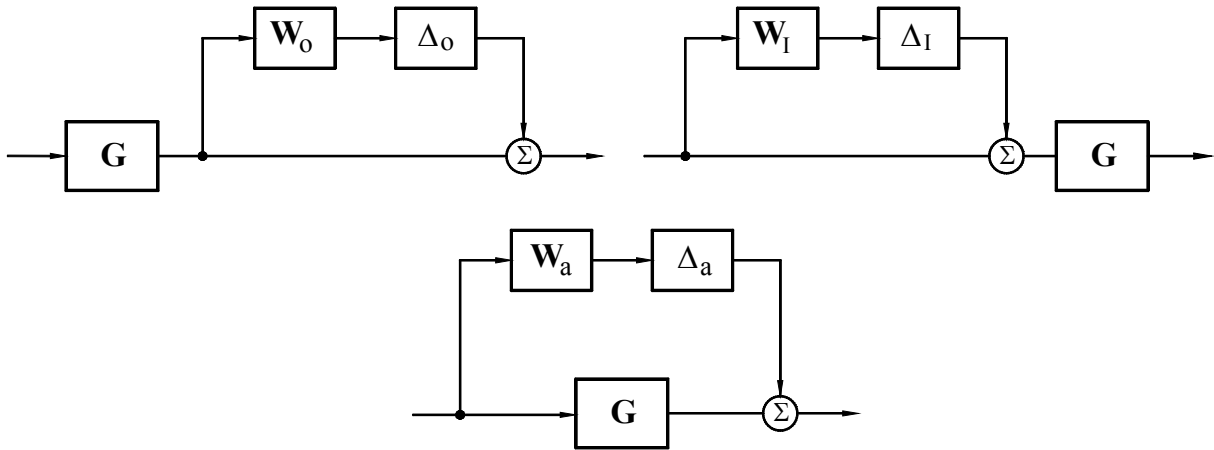
#### 3.3.1. Parametarske nesigurnosti

Parametarske nesigurnosti su dinamičke nesigurnosti koje se mogu javiti u mnogim industrijskim sustavima kao posljedica netočnog opisa karakteristika komponenata, efekata trošenja komponenata i sl. Utječu na promjenu svojstava sustava u niskofrekvencijskom području.



### 3.3.2. Nestrukturirane nesigurnosti

Ukoliko je model netočan zbog nemodelirane dinamike, koja je takva zbog namjernog zanemarivanja ili nedostatnog razumijevanja fizikalnog procesa, tada se za opisivanje grešaka modeliranja koriste tzv. nestrukturirane nesigurnosti (engl. *unstructured uncertainty*). One se obično javljaju u visokofrekvencijskom području (zanemarene forme vibriranja, nelinearnosti, histereza i slično). U sustavima upravljanja ove nesigurnosti se mogu opisati na različite načine, od kojih se tipično koriste aditivne ili multiplikativne perturbacije koje utječu na sustav na način prikazan na slici 3.7. S obzirom da je norma nesigurnosti ograničena na 1, blokovi  $\mathbf{W}_o$ ,  $\mathbf{W}_I$  i  $\mathbf{W}_a$  i predstavljaju težinske funkcije koje izražavaju maksimalnu veličinu nesigurnosti duž frekvencijskog raspona. Pri tome aditivni opis nesigurnosti predstavlja apsolutnu grešku, a multiplikativni prikaz relativnu grešku između dinamike stvarnog sustava i nominalnog modela.



**Slika 3.7.** Izlazna multiplikativna (gore lijevo), ulazna multiplikativna (gore desno) i aditivna greška modeliranja (dolje)

Ukoliko se model opiše na način da nesigurnosti  $\Delta_o$  utječu na izlaz (engl. *output*) procesa (slika 3.7, gore lijevo) može se pisati:

$$\Pi = \{ \mathbf{G}_p \mid \mathbf{G}_p = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_o \Delta_o) \mathbf{G}, \|\Delta_o\|_\infty \leq 1 \}. \quad (3.26)$$

Izraz  $\mathbf{W}_o \Delta_o$  predstavlja ukupnu multiplikativnu grešku na izlazu, gdje je  $\mathbf{W}_o = w_o \mathbf{I}_{n \times n}$  stabilna kvadratna dijagonalna matrica težinskih funkcija  $w_o$  koje opisuju veličinu nesigurnosti u promatranom frekvencijskom rasponu, a  $n$  broj izlaza iz sustava. S obzirom da  $H_\infty$  norma od  $\Delta_o$  varira u rasponu od 0 do 1 amplitudno ograničenje multiplikativne nesigurnosti se određuje pomoću težinske prijenosne funkcije  $w_o$ .

U slučaju kada nesigurnosti  $\Delta_I$  djeluju na ulazu (engl. *input*) procesa (slika 3.7, gore desno) tada vrijedi:

$$\Pi = \{ \mathbf{G}_p(s) \mid \mathbf{G}_p = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{W}_I \Delta_I), \|\Delta_I\|_\infty \leq 1 \}, \quad (3.27)$$

gdje izraz  $\mathbf{W}_I \Delta_I$  definira multiplikativnu grešku na ulazu, dok je  $\mathbf{W}_I = w_I \mathbf{I}_{n \times n}$  stabilna dijagonalna matrica težinskih funkcija  $w_I$ . S obzirom da za  $\Delta_I$  vrijede slična ograničenja kao za  $\Delta_o$  te da se  $\mathbf{W}_I$  mora odabrati na način da i u ovom slučaju  $\Pi$  opisuje stvarni proces, općenito vrijedi  $w_o \neq w_I$ . U slučaju SISO sustava, iz razloga što kod njih vrijedi princip komutativnosti, izrazi (3.26) i (3.27) su jednaki. Važno je istaknuti da se greške modeliranja fizički ne uključuju u model sustava, već se njihov utjecaj odražava ili na ulaz ili na izlaz iz sustava. Pri tome se npr. zanemarena dinamika aktuatora i senzora odražava na ulaz i izlaz procesa, respektivno, dok se greške modeliranja povezane s nemodeliranom unutarnjom dinamikom sustava mogu opisati primjenom oba izraza, (3.26) ili (3.27).

Uz aditivne nesigurnosti (slika 3.7, dolje) skup  $\Pi$  je definiran na slijedeći način:

$$\Pi = \{ \mathbf{G}_p \mid \mathbf{G}_p = \mathbf{G} + \mathbf{W}_a \Delta_a, \|\Delta_a\|_\infty \leq 1 \}, \quad (3.28)$$

Izraz  $\mathbf{W}_a \Delta_a$  predstavlja aditivnu grešku, tj. apsolutno odstupanje perturbiranog od stvarnog modela, pri čemu je  $\mathbf{W}_a = w_a \mathbf{I}_{n \times n}$  stabilna dijagonalna matrica težinskih funkcija  $w_a$ .

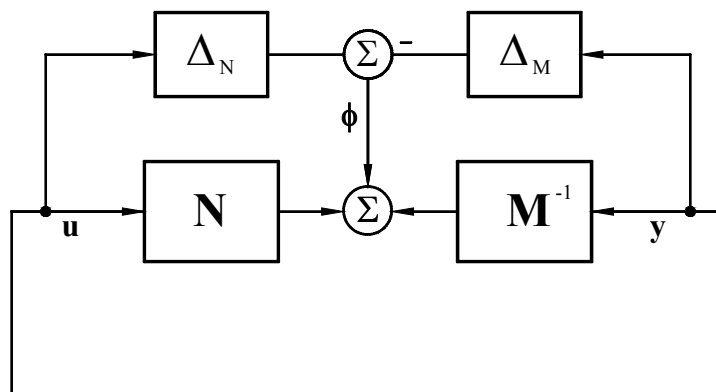
Osim navedenih, slijedeći učestalo korišteni oblik nestrukturiranih nesigurnosti su nesigurnosti *coprime* faktora (engl. *coprime factor uncertainty*) nominalnog modela<sup>6</sup> prikazane na slici 3.8 i opisane na način:

$$\Pi = \{ \mathbf{G}_p \mid \mathbf{G}_p = (\mathbf{M} + \Delta_M)^{-1} (\mathbf{N} + \Delta_N), \|\begin{bmatrix} \Delta_M & \Delta_N \end{bmatrix}\|_\infty \leq \varepsilon \}, \quad (3.29)$$

gdje su  $\Delta_M$  i  $\Delta_N$  stabilni nepoznati modeli koji predstavljaju nesigurnosti *coprime* faktora  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{N}$  nominalnog modela  $\mathbf{G}$ . Iz razloga što se ova vrsta nesigurnosti uglavnom koristi u procedurama gdje je cilj projektiranja regulatora maksimizirati amplitudu nesigurnosti ( $\varepsilon$ ) na

<sup>6</sup> Svaka matrica prijenosnih funkcija  $\mathbf{G}$  se može opisati pomoću para asimptotski stabilnih matrica prijenosnih funkcija  $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ , koje se nazivaju njezinim *coprime* faktorima, a pripadni postupak *coprime* faktorizacija (engl. *coprime factorization*). Pri tome, npr. u slučaju lijeve *coprime* faktorizacije vrijedi:  $\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$ , gdje  $\mathbf{M}$  sadrži sve nule nominalnog modela koje se nalaze u desnoj polovini kompleksne ravnine (engl. *right hand plane*, RHP), a  $\mathbf{N}$  sve polove nominalnog modela u RHP. Na taj se način osigurava da  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{N}$  nemaju zajedničkih nula u RHP koje bi rezultirale njihovim nepoželjnim poništavanjem prilikom tvorbe modela  $\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$ .

način da robusna stabilnost ostane očuvana, iste nisu normalizirane već je njihova amplituda  $\varepsilon \neq 1$ . Za MIMO sustave ovaj prikaz pruža dobar "generički" opis u slučajevima kada se ne koriste specifične prethodne informacije o prisutnim nesigurnostima u sustavu te se pokazao korisnim u mnogim primjenama.



Slika 3.8. Nesigurnosti *coprime* faktora

Analize s nestrukturiranim nesigurnostima se provode iz dva glavna razloga. Prvo, s općenitim opisom u obliku ovih nesigurnosti dovoljno se dobro mogu obuhvatiti parametarska odstupanja. Drugi je razlog, i najvažniji, to što se na ovaj način omogućuje modeliranje utjecaja nemodelirane dinamike koja je uvijek prisutna i treba se uzeti u obzir u pogledu robusne stabilnosti.

### 3.3.3. Strukturirane nesigurnosti

Kombinacijom parametarskih i nestrukturiranih nesigurnosti nastaju strukturirane nesigurnosti (engl. *structured uncertainty*). Najjednostavniji primjer strukturiranih nesigurnosti čini skup od dva ili više promjenjiva parametra sustava. Drugi, i najčešći, primjer koji se javlja u većini praktičnih slučajeva predstavlja kombinacija nestrukturiranih nesigurnosti (npr. zanemarena dinamika) i parametarskih nesigurnosti (npr. promjenjivi parametri sustava). Osim toga, bilo koja kombinacija dva ili više blokova nestrukturiranih nesigurnosti daje sustav sa strukturiranim nesigurnostima.

## 3.4. Ciljevi pri projektiranju regulatora

Glavni ciljevi robusnog upravljanja su postizanje stabilnosti sustava u zatvorenom krugu i željenih karakteristika koje definiraju ponašanje procesa. Ukoliko je poznat skup

modela  $\Pi$ , nominalni model MIMO sustava  $G$  te rezultirajući regulator  $K$ , može se općenito reći da sustav u zatvorenom krugu ima [44]:

**Nominalnu stabilnost (NS)**, ako  $K$  interno stabilizira<sup>7</sup> nominalni model  $G$ ,

**Robusnu stabilnost (RS)**, ako  $K$  interno stabilizira svaki model koji pripada skupu  $\Pi$ ,

**Nominalne karakteristike (NP)**, ako su željene karakteristike zadovoljene za nominalni model  $G$ ,

**Robusne karakteristike (RP)**, ako su željene karakteristike zadovoljene za svaki model koji pripada skupu  $\Pi$ .

### 3.4.1. Nominalna i robusna stabilnost

Općenito govoreći, svaki SISO linearni vremenski nepromjenjivi (engl. *Linear Time Invariant*, LTI) sustav je stabilan ukoliko su svi njegovi polovi smješteni u lijevoj polovini kompleksne ravnine, dok je stabilnost MIMO sustava ekvivalentna stabilnosti svih sastavnih prijenosnih funkcija promatranog zatvorenog sustava. Pri tome se nominalna stabilnost zatvorenog sustava, kojeg čini nominalni model bez nesigurnosti i projektirani regulator, postiže ukoliko su zadovoljeni spomenuti uvjeti te ako nema pojave nestabilnog poništavanja nula i polova u produktu prijenosnih funkcija  $KG$ .

S obzirom da se niti jedan fizički sustav ne može u potpunosti točno opisati s matematičkim modelom, regulator koji osigurava nominalnu stabilnost ne garantira ujedno i stabilnost stvarnog sustava. U takvom se slučaju nominalni model zamjenjuje s proširenim modelom koji osim osnovnog (nominalnog) modela obuhvaća i prikladno opisane nesigurnosti, dok se novi koncept stabilnosti za takav prošireni model naziva robusna stabilnost. Ukoliko su nesigurnosti ispravno odabrane i u zadovoljavajućoj mjeri pokrivaju dinamiku realnog sustava, isti se može stabilizirati sa svim regulatorima koji ispunjavaju robusnu stabilnost. Ključna stavka u analizi robusne stabilnosti se sastoji u određivanju veličine nesigurnosti koju nominalni model može podnijeti, a da prilikom toga ne postane nestabilan.

Dovoljni uvjeti za robusnu stabilnost sustava se mogu odrediti primjenom teorema malog pojačanja (engl. *Small gain theorem*) čije su osnovne postavke iznesene u prilogu B. Za tipične modele isti su dani u tablici 3.2.

---

<sup>7</sup> MIMO sustav je interno stabilan ukoliko su sve pripadne prijenosne funkcije (3.22) sustava u zatvorenom krugu stabilne

**Tablica 3.2.** Uvjeti robusne stabilnosti za nestrukturirane nesigurnosti MIMO sustava

Vrsta nesigurnosti	Model	Uvjeti robusne stabilnosti	Težinske prijenosne funkcije nesigurnosti
Multiplikativne nesigurnosti na izlazu	$\mathbf{G}_p(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_o \Delta_o) \mathbf{G}$	$\ \mathbf{W}_o \mathbf{T}_o\ _\infty < 1$	$ \mathbf{W}_o  \geq \max_i \bar{\sigma}(\mathbf{G}_{pi} \mathbf{G}^{-1} - \mathbf{I})$
Multiplikativne nesigurnosti na ulazu	$\mathbf{G}_p(s) = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{W}_I \Delta_I)$	$\ \mathbf{W}_I \mathbf{T}_I\ _\infty < 1$	$ \mathbf{W}_I  \geq \max_i \bar{\sigma}(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}_{pi} - \mathbf{I})$
Aditivne nesigurnosti	$\mathbf{G}_p(s) = \mathbf{G} + \mathbf{W}_a \Delta_a$	$\ \mathbf{W}_a \mathbf{K} \mathbf{S}_o\ _\infty < 1$	$ \mathbf{W}_a  \geq \max_i \bar{\sigma}(\mathbf{G}_{pi} - \mathbf{G})$

### 3.4.2. Nominalne i robusne karakteristike

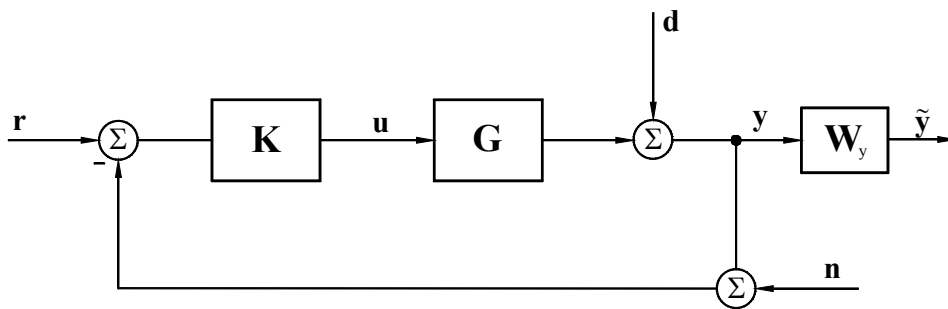
U teoriji regulacije izraz karakteristike se odnosi na odziv sustava u zatvorenom krugu prilikom slijeđenja reference ili pod utjecajem vanjskih poremećaja. Općenito govoreći, karakteristike sustava se mogu definirati u vremenskoj i frekvencijskoj domeni [45]. Tipični zahtjevi u vremenskoj domeni se određuju na temelju odziva sustava na jediničnu skokovitu ili impulsnu pobudu te uključuju: nadvišenje (engl. *overshoot*), vrijeme porasta (engl. *rise time*), vrijeme ustaljivanja (engl. *settling time*) i grešku u ustaljenom stanju (engl. *steady state error*).

AML sustavi obično nemaju definirane specifične zahtjeve u vremenskoj domeni te je prikladnije, naročito u slučaju robusne regulacije, za njihov opis koristiti frekvencijsku domenu. Zahtjevi karakteristika sustava u frekvencijskoj domeni se definiraju na temelju ograničenja koje moraju zadovoljiti karakteristične prijenosne funkcije zatvorenog sustava, kao što su npr.  $\mathbf{S}_o$  (u daljnjem tijeku rada, radi jednostavnosti, koristi se oznaka  $\mathbf{S}$ ) ili  $\mathbf{T}_o$  (u daljnjem tijeku rada koristi se oznaka  $\mathbf{T}$ ).

Za razliku od klasičnih veličina koje definiraju granicu stabilnosti, kao što su amplitudno i fazno pojačanje, u robusnoj se regulaciji kao granica preferira udaljenost između Nyquistovog dijagrama za otvoreni sustav i kritične točke u kompleksnoj ravnini ( $s_{kr} = -1$ ). Na temelju tog zapažanja proizlazi da se značajke karakteristika mogu definirati direktno u frekvencijskoj domeni pomoću maksimalne singularne vrijednosti funkcije osjetljivosti  $\mathbf{S}$ :

$$\|\mathbf{S} \mathbf{W}_y\|_\infty < 1, \quad (3.30)$$

gdje je  $\mathbf{W}_y$  korisnički definirana matrica težinskih funkcija karakteristika umetnuta u sustav na način prikazan na slici 3.9. To znači da u takvom sustavu regulator  $\mathbf{K}$  ispunjava zahtjeve karakteristika ako i samo ako je  $H_\infty$  norma prijenosne funkcije od  $\mathbf{d}$  prema  $\tilde{\mathbf{y}}$  manja od jedan. Gornja razmatranja su naročito korisna prilikom projektiranja  $H_\infty$  regulatora, što je detaljnije objašnjeno u poglavlju 3.5. S druge strane, dodatna ograničenja koja bezuvjetno utječu na nominalne karakteristike zatvorenog sustava, kao što su slijeđenje reference i odbijanje poremećaja, čine uvjeti robusne stabilnosti koji su za nestrukturirane nesigurnosti dani u tablici 3.2. Drugim riječima, to znači da uvjet robusne stabilnosti ograničava raspon frekvencija unutar kojih se mogu očekivati tražene karakteristike sustava. Osim toga, u okviru karakteristika zatvorenog sustava dovoljan uvjet da se ispuni (3.30), tj. da singularne vrijednosti funkcije osjetljivosti  $\mathbf{S}$  budu male na određenim frekvencijama jest da komplementarna funkcija osjetljivosti  $\mathbf{T}$  bude jednaka jedinici (0 dB) na istim frekvencijama ( $\mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{I}$ ).



Slika 3.9. Zatvoreni sustav s težinskom funkcijom karakteristika

Konačni je zaključak da zahtjevi za robusnom stabilnošću imaju izravan utjecaj na postignuta nominalna svojstva zatvorenog sustava. Pomoću njih se definira frekvencijski raspon zatvorenog sustava što istovremeno predstavlja ograničenje frekvencijskog raspona u kojem se postižu dobre karakteristike. Može se reći da postoji kompromis između robusne stabilnosti i karakteristika, tj. regulator koji je robusan na veći skup nesigurnosti iskazuje lošije karakteristike zbog činjenice da je njegov frekvencijski raspon uži. Posljedično, s ciljem poboljšanja karakteristika potrebno je smanjiti razinu nesigurnosti na način da se izradi točniji model sustava ili odrediti točniji prikaz nesigurnosti. U svim dosadašnjim razmatranjima uzete su u obzir samo nominalne karakteristike, tj. karakteristike zatvorenog sustava bez nesigurnosti. Međutim, kako su na niskim frekvencijama greške modeliranja obično manje stvarna razlika između robusnih i nominalnih karakteristika može se smatrati zanemarivom.

### 3.5. $H_\infty$ metoda upravljanja

U ovom su poglavlju prikazani osnovni pristupi  $H_\infty$  metode upravljanja s posebnim naglaskom na  $H_\infty$  metodu mješovite osjetljivosti i Glover-McFarlane  $H_\infty$  metodu. Sinteza  $H_\infty$  regulatora se može provesti primjenom jednog od dva slijedeća osnovna pristupa [36]:

- Pristup temeljen na oblikovanju prijenosnih funkcija sustava (engl. *loop shaping*):

Ovaj pristup predstavlja jednostavan, ali moćan alat za sintezu regulatora koji se temelji na oblikovanju prijenosnih funkcija sustava u otvorenom ili zatvorenom krugu. Pri tome se za dani LTI sustav određuje oblik prijenosne funkcije u frekvencijskoj domeni i projektira regulator koji oblikuje prijenosnu funkciju u zadani oblik. Ovaj pristup može biti naročito učinkovit u slučajevima kada točan model nesigurnosti nije poznat zbog čega se cilj projektiranja svodi na određivanje razumnog oblika prikladnih prijenosnih funkcija sustava. Ukoliko se oblikovanje provodi u otvorenoj petlji ( $\mathbf{L} = \mathbf{GK}$ ) često korištena metoda je tzv. Glover-McFarlane  $H_\infty$  metoda. S druge strane, oblikovanje prijenosnih funkcija u zatvorenoj petlji (funkcije osjetljivosti, komplementarne funkcije osjetljivosti i sl.) dovodi do često korištene  $H_\infty$  metode mješovite osjetljivosti (engl. *mixed sensitivity method*). Osim toga, ovom se formulacijom jednostavnije mogu uzeti u obzir dinamičke nesigurnosti koje predstavljaju zanemarenu ili nemodeliranu dinamiku.

- Pristup temeljen na signalima (engl. *signal-based approach*):

Ovaj pristup se temelji na poznatim informacijama o fizičkim veličinama signala koji se očekuju te pretpostavlja da nominalni model i modeli nesigurnosti obuhvaćaju suštinsku dinamiku sustava. Težinske funkcije koje opisuju prihvatljive veličine ulaznih i izlaznih signala se mogu definirati za sve odabrane prijenosne funkcije zatvorenog sustava. Općenito govoreći, na ovaj se način često dolazi do složenih modela jer se tipično razmatra mnogo veći broj prijenosnih funkcija i pripadnih ograničenja. Pristup može biti dosta konzervativan jer kao referencu uzima najgoru kombinaciju signala, što je malo vjerojatno da će se ostvariti u stvarnim uvjetima.

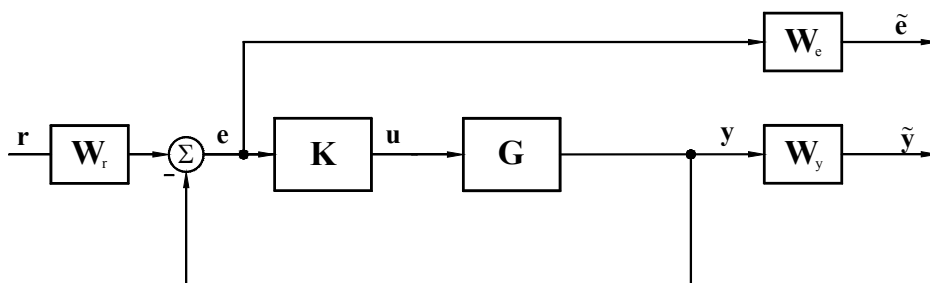
#### 3.5.1. $H_\infty$ metoda mješovite osjetljivosti

$H_\infty$  metoda mješovite osjetljivosti se ubraja u metode koje se temelje na oblikovanju prijenosnih funkcija. Kao što i sam naziv upućuje, ovim se pristupom provodi minimizacija

$H_\infty$  norme karakterističnih prijenosnih funkcija zatvorenog kruga, kao što su funkcija osjetljivosti  $\mathbf{S}$  i komplementarna funkcija osjetljivosti  $\mathbf{T}$ . Iz slike 3.5 i izraza (3.24) mogu se direktno uočiti i preostale karakteristične prijenosne funkcije koje utječu na ponašanje sustava i čija minimizacija može također biti od presudnog značaja na ponašanje zatvorenog sustava ( $\mathbf{KS}$  i  $\mathbf{SG}$ ). Odabir prijenosnih funkcija koje će sudjelovati u minimizaciji ovisi o vrsti sustava i postojećoj problematici u njegovom odzivu.

Iz standardne konfiguracije upravljanja sustava u povratnoj vezi (slika 3.5) uočava se da prijenosna funkcija od ulaznog poremećaja  $\mathbf{d}$  do izlaza  $\mathbf{y}$  te od referentnog ulaza  $\mathbf{r}$  do greške sustava  $\mathbf{e}$  odgovara funkciji  $\mathbf{S}$  odakle proizlazi da se njenom minimizacijom dolazi do dobrog slijeđenja referentnog signala i uklanjanja vanjskih poremećaja. Prema tome, jedan od primarnih ciljeva sustava, uključujući rotorske sustave s AML, je minimizacija funkcije osjetljivosti  $\mathbf{S}$ , što je već i prethodno napomenuto u poglavlju o ostvarivanju traženih karakteristika sustava i prikazano izrazom (3.30).

S druge strane, ukoliko se istovremeno traži robusnost s obzirom na multiplikativne nesigurnosti i smanjenje šumova senzora potrebno je minimizirati  $\mathbf{T}$ . Ali, s obzirom da između  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{T}$  vrijedi relacija  $\mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{I}$  osnovna priroda svih sustava s povratnom vezom uvijek uključuje kompromis između potrebe sustava za ostvarivanjem dobrih karakteristika (otklanjanjem poremećaja i slijeđenjem referentnog naloga) i potrebe za smanjenjem utjecaja šumova mjerenja i osiguravanja robusnosti [36]. Nasreću, spomenuti suprotstavljajući zahtjevi se traže u različitim frekvencijskim rasponima. Pri tome su u niskofrekvencijskom području zahtjevi za slijeđenjem i odbijanjem vanjskih poremećaja obično visoki i sustav je dovoljno poznat, što zahtijeva mali  $\mathbf{S}$  na štetu većeg  $\mathbf{T}$ , dok je u visokofrekvencijskom području situacija obrnuta, u sustavu dominiraju veće nesigurnosti te se zahtijeva manji  $\mathbf{T}$  na štetu lošijih karakteristika (veliki  $\mathbf{S}$ ). Željeni oblik za  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{T}$  se postiže uvođenjem težinskih funkcija  $\mathbf{W}_e$  i  $\mathbf{W}_y$  na način prikazan na slici 3.10 čime se dobiva tzv.  $\mathbf{S}/\mathbf{T}$  konfiguracija.



Slika 3.10.  $\mathbf{S}/\mathbf{T}$  konfiguracija mješovite osjetljivosti



U ovom slučaju rezultirajuća prijenosna funkcija  $\mathbf{T}_{zw}$  od vanjskog ulaza  $\mathbf{w} = \mathbf{r}$  do karakteristika  $\mathbf{z} = [\tilde{\mathbf{e}} \quad \tilde{\mathbf{y}}]^T$  iznosi

$$\mathbf{T}_{zw} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e \mathbf{S} \mathbf{W}_r \\ \mathbf{W}_y \mathbf{T} \mathbf{W}_r \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

S ciljem ograničavanja upravljačkog signala i zasićenja aktuatora standardna S/T konfiguracija se može proširiti s težinskom funkcijom  $\mathbf{W}_u$  koja oblikuje KS čime nastaje tzv. S/T/KS konfiguracija. Pripadna prijenosna funkcija takvog zatvorenog sustava glasi:

$$\mathbf{T}_{zw} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e \mathbf{S} \mathbf{W}_r \\ \mathbf{W}_y \mathbf{T} \mathbf{W}_r \\ \mathbf{W}_u \mathbf{K} \mathbf{S} \mathbf{W}_r \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Najveća prednost zapisa i projektiranja sustava u obliku konfiguracija mješovitih osjetljivosti (S/T, S/T/KS, S/KS/GS) je mogućnost jednostavnog razmatranja gotovo svih zahtjeva zatvorenog sustava. Međutim, detaljnijom analizom je pokazano da ovakve konfiguracije često dovode do poništavanja polova sustava s nulama regulatora. Posljedično, iz razloga što se polovi sustava obično ne mogu modelirati s dovoljnom točnošću, a osim toga mogu se i pomicati u različitim radnim uvjetima, npr. pod djelovanjem giroskopskog utjecaja, prilikom implementacije praktičnih regulatora poništavanje nula i polova se obično izbjegava te se razmatra općenitiji pristup koji uključuje oblikovanje S/T/KS/GS konfiguracije,

$$\mathbf{T}_{zw} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_e \mathbf{S} \mathbf{W}_r & \mathbf{W}_e \mathbf{G} \mathbf{S}_i \mathbf{W}_d \\ \mathbf{W}_u \mathbf{K} \mathbf{S} \mathbf{W}_r & \mathbf{W}_u \mathbf{T}_i \mathbf{W}_d \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Na taj se način sprječava problem nepoželjnog poništavanja nula i polova koje je prisutno u prethodno navedenim konfiguracijama, ali oblikovanje prijenosnih funkcija postaje otežano ako je u modelu prisutno više od dvije težinske funkcije. Prirodno proširenje, naročito kod elastičnih struktura koje posjeduju slabo prigušene polove, predstavlja Glover-McFarlane  $H_\infty$  metoda, opisana u slijedećem poglavlju.

### 3.5.2. Glover-McFarlane $H_\infty$ metoda

Ovaj postupak projektiranja regulatora se temelji na  $H_\infty$  metodi robusne stabilizacije u kombinaciji s klasičnim oblikovanjem prijenosnih funkcija. Predložili su je 1989. Glover i McFarlane. Detalji ovog postupka se mogu pronaći u literaturi [36].

### 3.5.2.1. Robusna stabilizacija

Za sustave s više varijabli klasične veličine za određivanje stabilnosti, kao što su amplitudna i fazna pričuva, su se pokazale nerealnima za određivanje robusne stabilnosti. Iz tog se razloga nesigurnosti često modeliraju pomoću stabilnih normom ograničenih matričnih težinskih funkcija (vidi poglavlje 3.3.2). Primjenom jedne perturbacije testiranje robusnosti se provodi u obliku maksimalnih singularnih vrijednosti različitih prijenosnih funkcija sustava u zatvorenom krugu. Osim toga, u tom pristupu nominalni i perturbirani model uvijek imaju jednak broj nestabilnih polova ili nestabilnih nula.

Kako bi se prevladalo spomenuto ograničenje, mogu se primijeniti dvije perturbacije po jedna na svakom *coprime* faktoru nominalnog modela (slika 3.8Slika 3.8. ). Iako se ovaj opis nesigurnosti čini nerealističnim i manje intuitivnim od ostalih vrsta nesigurnosti on je općenit te se pokazao korisnim u problemima  $H_\infty$  robusne stabilizacije. Razmotrit će se nominalni model procesa  $\mathbf{G}$  čija normalizirana lijeva *coprime* faktorizacija glasi:

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \quad (3.34)$$

i uz koji je pripadni skup perturbiranih modela opisan izrazom (3.29). Za promatrani model robusna stabilnost je ostvarena ako i samo ako je nominalni sustav u povratnoj petlji stabilan i ako vrijedi:

$$\gamma = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.35)$$

Može se uočiti da je  $\gamma$   $H_\infty$  norma od ulaza  $\phi$  prema izlazu  $[\mathbf{u} \ \mathbf{y}]^T$ , a  $(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C})^{-1}$  funkcija osjetljivosti sustava. Najniža vrijednost  $\gamma$  i odgovarajuća maksimalna granica stabilnosti  $1/\varepsilon$  su definirane na slijedeći način:

$$\gamma_{\min} = 1/\varepsilon_{\max} = (1 + \lambda(\mathbf{X}\mathbf{Z}))^{1/2}, \quad (3.36)$$

gdje  $\lambda$  označava maksimalnu vlastitu vrijednost, a za nominalni model  $\mathbf{G}$  zapisan u modelu prostora stanja  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ,  $\mathbf{X}$  i  $\mathbf{Z}$  su jedinstvena rješenja algebarskih Riccati jednadžbi:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C})\mathbf{Z} + \mathbf{Z}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C})^T - \mathbf{Z}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Z} + \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C})\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C})^T - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.37)$$

uz

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{D}^T \text{ i } \mathbf{S} = \mathbf{I} + \mathbf{D}^T\mathbf{D}. \quad (3.38)$$

Konačno, regulator koji osigurava da je

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{M}^{-1} \right\|_{\infty} < \gamma. \quad (3.39)$$

je definiran na slijedeći način:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F} + \gamma^2 (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{Z}\mathbf{C}^T (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{F}) & \gamma^2 (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{Z}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T \mathbf{X} & -\mathbf{D}^T \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

uz

$$\mathbf{F} = -\mathbf{S}^{-1} (\mathbf{D}^T \mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{X}), \quad \mathbf{L} = (1 - \gamma^2) \mathbf{I} + \mathbf{X}\mathbf{Z}. \quad (3.41)$$

S obzirom da se  $\gamma_{\min}$  može izračunati direktno iz izraza (3.39) eksplicitno se rješenje dobiva rješavanjem samo dvije Riccati jednadžbe (3.37) čime se izbjegava  $\gamma$ -iteracija svojstvena općenitim  $H_{\infty}$  problemima (3.25). Ova je procedura implementirana u programski paket Matlab u obliku naredbe *ncfsysn*.

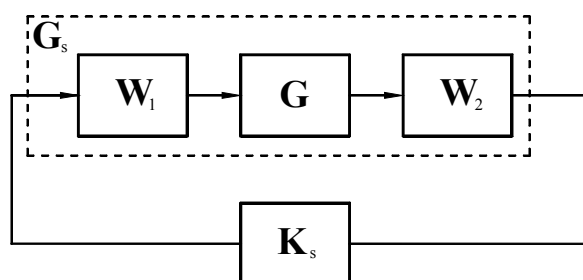
### 3.5.2.2. Postupak implementacije Glover-McFarlane $H_{\infty}$ metode

McFarlane i Glover su predložili postupak za oblikovanje singularnih vrijednosti sustava u otvorenoj petlji i sintezu regulatora, koji se sastoji od dva koraka.

*Prvi korak:*

U prvom koraku se proces u otvorenom krugu opisan lijevom *coprime* faktorizacijom (3.34) proširuje s predkompenzatorom  $\mathbf{W}_1$  i postkompenzatorom  $\mathbf{W}_2$  (slika 3.11). Dijagonalni elementi matrica  $\mathbf{W}_1$  i  $\mathbf{W}_2$  se odabiru na način da osiguravaju željeni oblik singularnih vrijednosti frekvencijskog odziva procesa koji se regulira. U tom slučaju oblikovani model glasi:

$$\mathbf{G}_s = \mathbf{W}_2 \mathbf{G} \mathbf{W}_1 \quad (3.42)$$



Slika 3.11. Oblikovani model s regulatorom

*Drugi korak:*

U drugom se koraku rezultirajući oblikovani proces  $G_s$  robusno stabilizira s obzirom na nesigurnosti *coprime* faktora primjenom  $H_\infty$  optimizacije opisane u poglavlju 3.5.2.1 i određuje pripadni regulator  $K_s$ . Važna prednost metode se sastoji u tome što se u ovom koraku ne traži eksplicitno definiranje nesigurnosti ili odabir težinskih funkcija. Traženi regulator  $K$  za model  $G$  glasi:

$$K = W_1 K_s W_2. \quad (3.40)$$

U mnogim su praktičnim sustavima, uključujući rotore s AML, procesi nestabilni i posjeduju višestruke amplitudne prijelazne frekvencije<sup>8</sup>. U tim slučajevima, prema standardnom Glover-McFarlane postupku odabir prijenosnih funkcija za oblikovanje procesa u otvorenoj petlji postaje otežan. Međutim, poznato je da se predkompensator obično odabire kao niskopropusni filter, a prema potrebi može uključivati i *notch* filtre koji su posebno učinkoviti prilikom uklanjanja elastičnih formi.

---

<sup>8</sup> Amplitudna prijelazna frekvencija (engl. *gain crossover frequency*) je frekvencija kojoj odgovara jedinično amplitudno pojačanje (0 dB)

## Poglavlje 4.

# Numerički model elastičnog rotora oslonjenog na radijalnim AML

U ovom je poglavlju predstavljen numerički model koji je izrađen na temelju teorijskih postavki iznesenih u 2. i 3. poglavlju. Osim toga, s ciljem prelaska rotora s nekolokacijom iznad prve kritične brzine izrađen je algoritam kojim se odabire konfiguracija sustava, tj. izbjegava modalni čvor između osi aktuatora i senzora. U takav je sustav moguće implementirati PID regulator koji će u slijedećoj fazi poslužiti kao temelj za usporedbu s rezultatima eksperimentalnog modela, a nakon toga kao osnova za projektiranje naprednije Glover-McFarlane  $H_\infty$  metode.

### 4.1. Opis numeričkog modela za analizu dinamike rotora s AML

Primjenom programskog paketa Matlab izrađen je numerički model koji omogućuje dinamičku analizu rotora oslonjenog na dva radijalna AML. Model se temelji na MKE metodi te obuhvaća linearno ponašanje magnetskih ležajeva. Obuhvaćeno je gibanje rotora u dvije međusobno okomite ravnine te se nudi mogućnost analize rotora u prisustvu giroskopskog utjecaja.

S obzirom da su AML tipični mehatronički sustavi posebnu pažnju je potrebno posvetiti izradi modela elastične osovine s diskovima, ali i odgovarajućim modelima elektroničkih komponenata (senzora, energetskog pretvarača i aktuatora). Strukturni model osovine se temelji na metodi konačnih elemenata te je izrađen primjenom Euler-Bernouli grednog elementa. Na taj se način omogućava dinamička analiza rotora, koja uključuje analizu formi

vibriranja s ciljem utvrđivanja položaja čvora između senzora i aktuatora, tj. analize modela s aspekta nekolokacije, određivanje dijagrama ovisnosti vlastitih frekvencija o krutosti ležaja te određivanje Campbellovog dijagrama. Osim toga, ukoliko se uključe modeli preostalih sastavnih komponenata (AML, senzora, energetskog pretvarača, kašnjenja signala) koji zajedno sa strukturnim modelom rotora i regulatorom čine zatvoreni krug sustava dobiva se učinkoviti alat za aktivno upravljanje dinamike rotora.

Izrađeni programski alat omogućuje aktivno upravljanje dinamikom elastičnog rotora u uvjetima različitih pobudnih mehanizama poput sila neuravnoteženja masa, neporavnatosti osi pogonskog i radnog stroja, težine te raznih prijelaznih odziva (odziv na skokovitu pobudu). Zbog općenitog pristupa u definiranju svih ulaznih veličina opisanim pristupom je moguće analizirati i praktične sustave različitih konfiguracija.

#### 4.1.1. Struktura numeričkog programa u okružju Matlab/ Simulink

Program se prema načinu izvođenja može podijeliti na dvije osnovne cjeline:

1) U programskom paketu Matlab kreiraju se datoteke koje na temelju zadanih ulaznih podataka (dimenzije i materijal rotora, strukturno prigušenje, karakteristike AML, senzora i pretvarača i sl.) u potpunosti opisuju promatrani proces. Na ovaj način definirane datoteke služe za izradu strukturnog modela rotora i opis potrebnih elektroničkih komponenata, tj. izradu cjelovitog modela sustava u otvorenom krugu.

2) Primjenom blokovskog prikaza u programskom paketu Matlab/ Simulink provodi se povezivanje prethodno pripremljenih modela elastičnog rotora i svih sastavnih elektroničkih komponenata s regulatorima (PID regulator s *notch* filtrima ili  $H_\infty$  robusni regulator) u zatvoreni krug sustava. U ovom se okružju provodi cjelovita daljnja analiza svih komponenata te projektiranje regulatora i analiza odziva u zatvorenom krugu.

##### *Izrada modela sustava u otvorenom krugu u programskom paketu Matlab*

Sve sastavne datoteke (izvršne skripte i ugrađene funkcije) numeričkog programa su povezane u jednu cjelinu kako bi se pripremio osnovni model na temelju kojeg će se naknadno provesti projektiranje regulatora u Simulinku. Programska struktura prezentiranog programa u okružju Matlab se sastoji od slijedećih datoteka:

***aml\_START.m*** – Ova datoteka čini glavnu izvršnu datoteku iz koje se pozivaju sve ostale skripte i funkcije u skladu s redoslijedom izrade modela. Modeliranje se provodi prema slijedećim koracima:

1. Korak: Definiranje dimenzija rotora i materijala
2. Korak: Izrada MKE strukturnog modela
3. Korak: Modalna dekompozicija i redukcija MKE modela
4. Korak: Ugradnja aktivnih magnetskih ležajeva
5. Korak: Unos karakteristika senzora i energetskog pretvarača
6. Korak: Izrada sustava u zatvorenom krugu -> Simulink

Prema navedenim se koracima iz komandnog prozora Matlaba provodi sistematičan unos svih potrebnih veličina modela.

***aml\_konfiguracije.m*** – U ovoj su datoteci definirane polazne vrijednosti karakteristika materijala (modul elastičnosti, gustoća) i dimenzija po karakterističnim odsječcima rotora za nekoliko predloženih rotorskih konfiguracija, redom kako slijedi:

0 - Proizvoljna konfiguracija

1 - (AML-DISK-AML) Osnovna konfiguracija

2 - (AML-DISK-AML-DISK) 1. disk na sredini, 2. na DE (engl. Drive End) prepustu

3 - (DISK-AML-DISK-AML) 1. disk na NDE (engl. Non-Drive End) prepustu, 2. na sredini

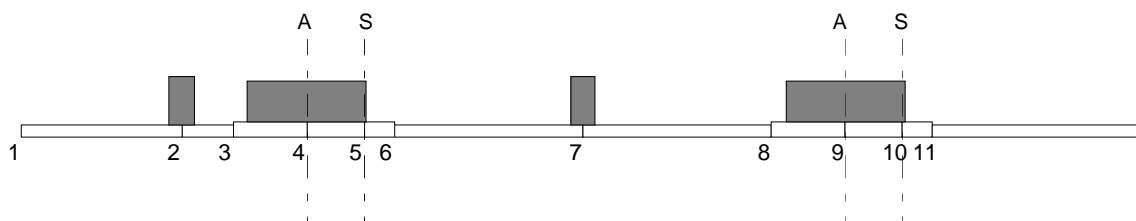
4 - (DISK-AML-DISK-AML-DISK) 1. disk na NDE prepustu, 2. u sredini, 3. na DE prepustu

5 - (DISK-AML-DISK-DISK-AML-DISK) 1. disk na NDE prepustu, 2. i 3. u sredini, 4. na DE prepustu

Minimalni broj odsječaka od kojih je sastavljena osovina ovisi o složenosti geometrije, broju koncentriranih masa (diskova) koje se na nju ugrađuju te broju aktuatora i senzora u sustavu. Sve veličine unutar odabrane konfiguracije su na sistematičan način povezane u vektore podataka koji služe kao osnova za izradu konačne geometrije rotora.

***aml\_geometrija.m*** – U ovoj se datoteci za konfiguraciju odabranu u prethodnom koraku svakom odsječku osovine i svakoj masi sustava pridružuju stvarne dimenzije. Njihove veličine se upisuju zasebno za svaki odsječak i svaki disk u skladu s redoslijedom pojavljivanja (s lijeva na desno). U ovom koraku se definiraju i stvarne vrijednosti modula

elastičnosti i gustoće materijala te položaji svih koncentriranih masa, aktuatora i senzora. Geometrijski definiran model rotora se prikazuje u obliku grafičkog prikaza koji je za konfiguraciju odabranu u poglavlju 4.2 predstavljen na slici 4.1.



**Slika 4.1.** Geometrija konfiguracije izrađena u numeričkom programu (A – aktuatori, S – senzori)

***aml\_mke.m*** – Ova datoteka predstavlja jezgru za izradu strukturnog modela rotora primjenom MKE metode. Elastična osovina se modelira pomoću grednih konačnih elemenata (Euler-Bernouli gredni element) poznatih duljina i promjera, a svi diskovi i laminirani dijelovi AML kao koncentrirani diskovi poznatog unutarnjeg promjera, vanjskog promjera i širine koji se smještaju u čvorove. Datoteka je oblikovana u obliku Matlab funkcije:

```
function [M, D, G, K] = aml_mke (E, density, N, L, D, nel, nmasa, Du, Dv, Hh, nb, Db, rb, A_poz, S_poz, D_poz, omega)
```

*Ulazne veličine* (izlaz iz skripte *aml\_geometrija.m*):

*Za osovinu:*

- E* : modul elastičnosti
- density* : gustoća
- N* : broj odsječaka na koje je podijeljena osovina
- L* : duljine pojedinih odsječaka
- D* : promjeri pojedinih odsječaka
- nel* : broj elemenata na odsječcima
- omega* : brzina vrtnje osovine

*Za koncentrirane mase (diskove)*

- nmasa* : ukupni broj koncentriranih masa
- Du* : unutarnji promjer diska
- Dv* : vanjski promjer diska
- Hh* : širina diskova
- nb* : broj provrta na disku
- Db* : promjer provrta na disku
- rb* : radijus na kojem se nalaze provrti



$D_{poz}$  : položaji diskova

Za senzore i aktuatore:

$A_{poz}$  : položaji senzora

$S_{poz}$  : položaji aktuatora

Izlazne veličine:

$M$  : matrica masa

$D$  : matrica prigušenja

$G$  : matrica giroskopskog utjecaja

$K$  : matrica krutosti

***aml\_red.m*** – U ovoj se datoteci s ciljem smanjenja broja stupnjeva slobode gibanja MKE modela provodi modalna dekompozicija (vidi poglavlje 2.3.2). Nakon toga se iz dobivene modalne matrice uklanjaju stupci vezani za forme vibriranja koje imaju najmanji utjecaj na ponašanje sustava i koje ne ulaze u frekvencijski raspon odziva rotora (vidi poglavlje 2.3.3). Datoteka je oblikovana u obliku Matlab funkcije:

```
function [xn, freqvec, Dr, Gr, Kr] = aml_red (M, D, G, K, modes_control)
```

Ulazne veličine:

$M$  : matrica masa

$D$  : matrica prigušenja

$G$  : matrica giroskopskog utjecaja

$K$  : matrica krutosti

*modes\_control* : broj zadržanih elastičnih formi vibriranja

Izlazne veličine:

$xn$  : reducirana modalna matrica za gibanje u dvije ravnine

*freqvec* : vektor vlastitih frekvencija

$Dr, Gr, Kr$  : reducirane matrice prigušenja, giroskopskog utjecaja i krutosti

Uz poznatu modalnu matricu mogu se odrediti elastične forme vibriranja (datoteka *dg\_eigen.m*) te izraditi Campbelov dijagram neoslonjenog rotora (datoteka *dg\_campbel.m*).

***aml\_ks\_ki.m*** – Datoteka u kojoj se definiraju polazne vrijednosti koeficijenata ležaja  $k_s$  i  $k_i$  pri čemu se uzima da su jednaki za sve četiri promatrane radijalne osi gibanja. Struktura koda dopušta da se iste mogu promijeniti tijekom izvođenja programa iz skripte *aml\_START.m*

**aml\_red2ss.m** – U ovoj se datoteci reducirani MKE model transformira u model prostora stanja (2.42) koji na jednostavan način omogućuje definiranje svih ulaznih (sila aktuatora, vanjske sile) i izlaznih (izmjereni pomak) signala sustava. Pritom se pretpostavlja da sila aktuatora djeluje uvijek na istom položaju koji odgovara realnom položaju aktuatora, dok se os senzora može podudarati s osi aktuatora (kolokacija) ili se nalaziti na određenoj udaljenosti duž uzdužne osi rotora (nekolokacija). Ova je datoteka oblikovana u obliku sljedeće Matlab funkcije:

$$[a, bi, bu, c, d] = \text{aml\_reduce2ss}(xn, \text{freqvec}, Dr, Gr, Kr)$$

*Ulazne veličine:*

*xn* : reducirana modalna matrica  
*freqvec* : vektor vlastitih frekvencija  
*Dr, Gr, Kr* : reducirane matrice prigušenja, giroskopskog utjecaja i krutosti

*Izlazne veličine:*

*a* : modalna matrica stanja  
*bi* : modalna ulazna matrica sila aktuatora  
*bu* : modalna ulazna matrica vanjskih sila  
*c* : izlazna matrica

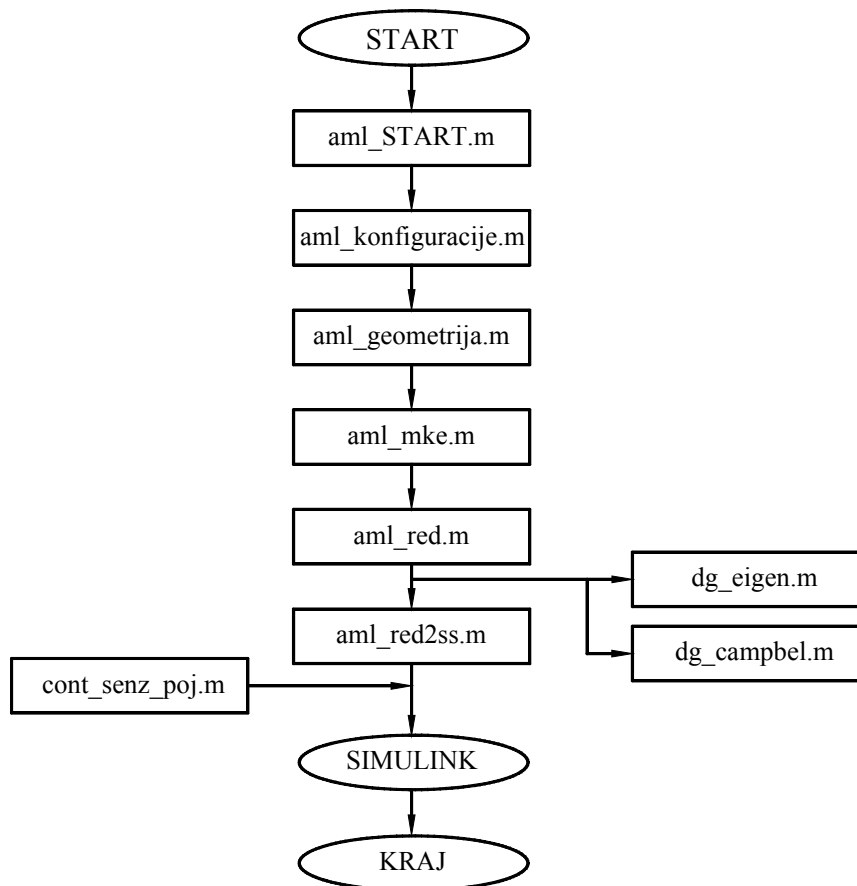
**cont\_senz\_poj.m** – Datoteka u kojoj se definiraju karakteristike senzora (osjetljivost) i energetskog pretvarača (pojačanje, granična frekvencija, prigušenje)

Nastavno na predstavljene datoteke, na slici 4.2 je prikazan dijagram toka za prvi dio numeričkog programa koji je vezan za izradu modela sustava u otvorenom krugu u programskom paketu Matlab. U prilogu C je dan ispis datoteke *aml\_START.m* vezan uz konfiguraciju usvojenu u poglavlju 4.2.

#### *Izrada modela sustava sa zatvorenom povratnom vezom u okružju Simulink*

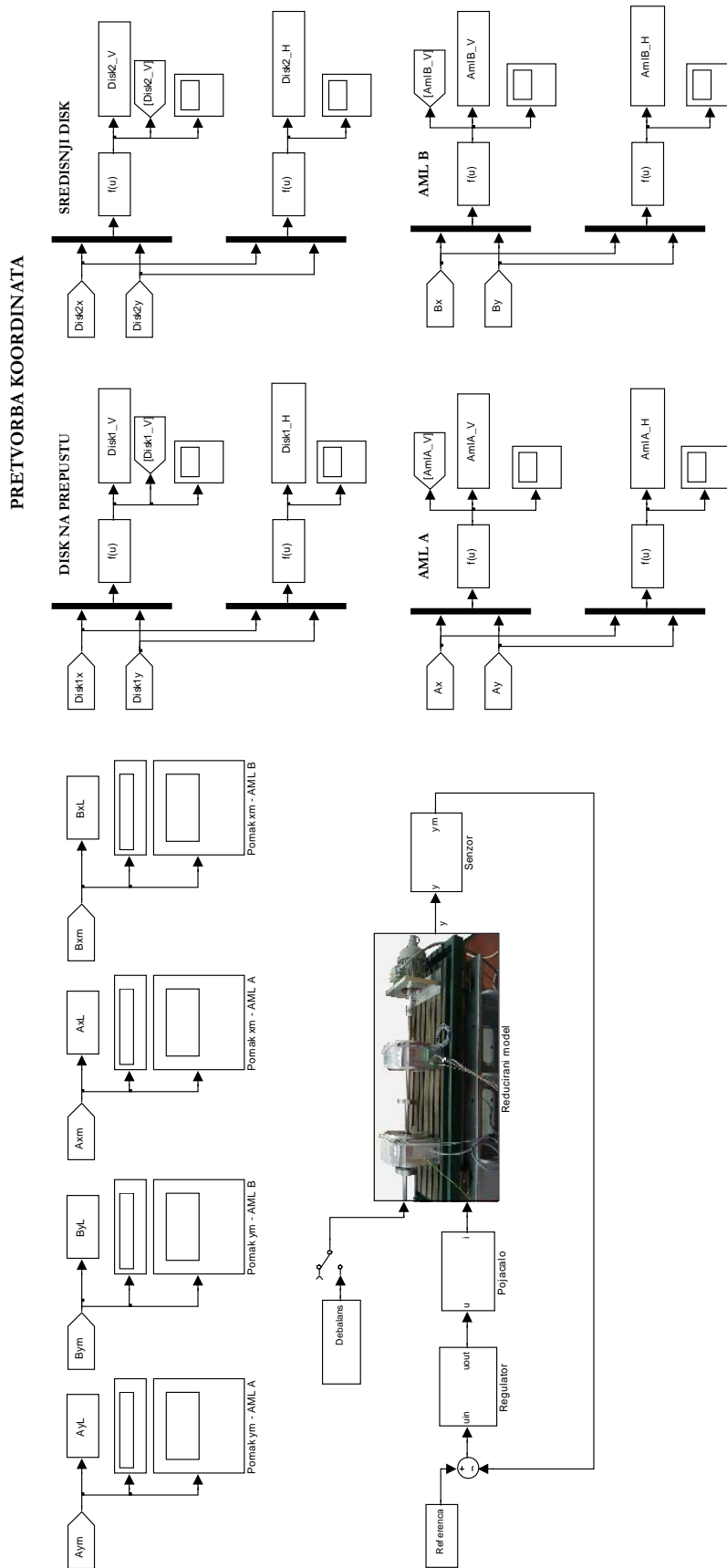
Drugi dio numeričkog modela je izrađen u okružju Simulink te omogućuje modeliranje cjelokupnog modela sustava u zatvorenom krugu. Pripadni blokovski prikaz Simulink modela elastičnog rotora oslonjenog na dva AML u je prikazan na slici 4.3. U takav je sustav moguće implementirati PID decentraliziranu metodu upravljanja na način da se na svakoj osi regulacije ugradi po jedan PID regulator (ukupno četiri regulatora) s konfiguracijom danom u izrazu (3.8) i *notch* filtrima definiranim izrazom (3.9) ili centralizirani  $H_\infty$  regulator. Nakon što su isti uspješno implementirani provodi se dinamička analiza odziva cjelokupnog AML

sustava u zatvorenom krugu, kako u stanju mirovanja tako i prilikom prolaska kroz prvu kritičnu brzinu. Usporedbom odziva pomaka rotora s aspekta stabilnosti i karakteristika može se izvesti zaključak o prednostima i nedostacima implementiranih regulatora.

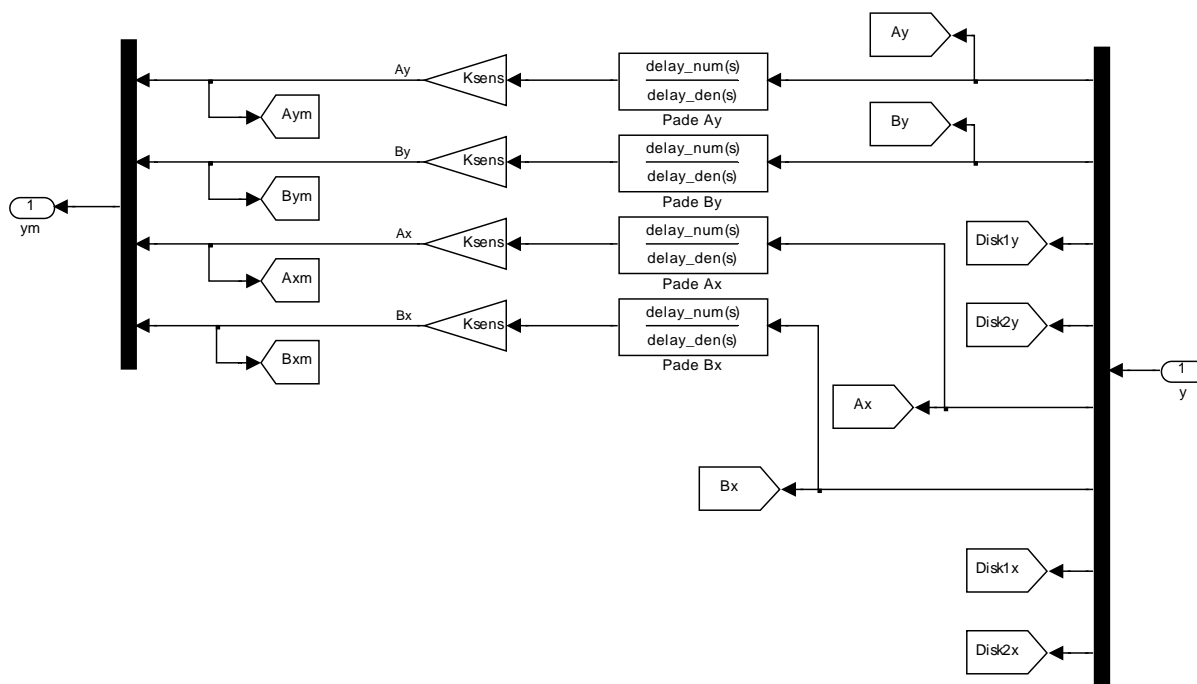


**Slika 4.2.** Dijagram toka izrade numeričkog modela u programskom paketu Matlab/ Simulink

Modeliranje u Simulinku započinje od senzora koji mjere pomake rotora na četiri radijalne osi gibanja. Svi se senzori modeliraju kao konstanta čija je veličina jednaka osjetljivosti senzora,  $K_{\text{sens}} = 8000 \text{ V/m}$  i s vremenskim kašnjenjem 0,5 ms u obliku Padeove aproksimacije 1. reda, kao što je prikazano u sklopu podsustava *Senzor* na slici 4.4.

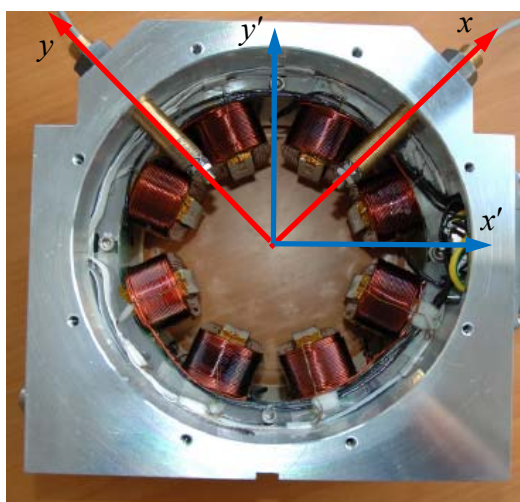


Slika 4.3. Blokovski prikaz rotora oslonjenog na dva AML u zatvorenom krugu



Slika 4.4. Model senzora

S obzirom da su osi regulacije smještene pod kutom  $\pm 45^\circ$  u odnosu na vertikalnu ravninu definirana su dva koordinatna sustava prikazana na slici 4.5. U smjeru osi  $x$  i  $y$  se dovodi sila aktuatora i mjeri pomak direktno na položaju AML pomoću senzora ležaja. U smjeru osi  $x'$  i  $y'$  će se provoditi eksperimentalna mjerenja pomoću dodatnih vanjskih beskontaktnih senzora.



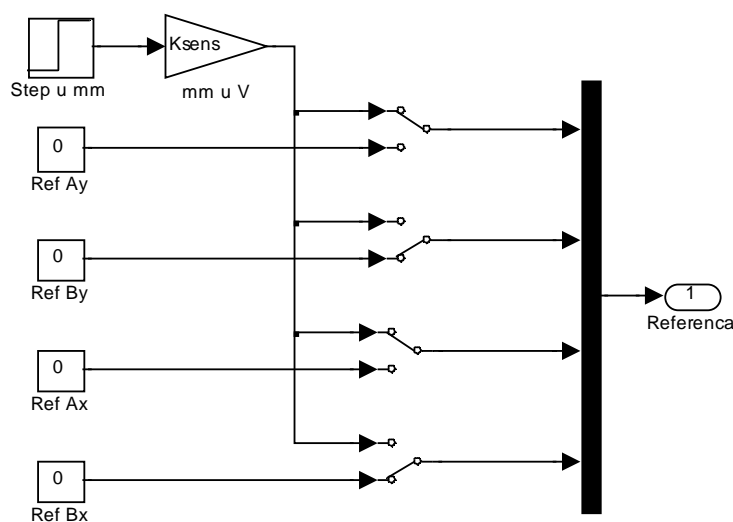
Slika 4.5. Koordinatne osi AML

S ciljem usporedbe mjerenja u opisanim koordinatnim sustavima primijenjena je transformacijska matrica:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Njenom implementacijom na način prikazan na slici 4.3. u potpunosti je omogućena pretvorba pomaka iz jednog u drugi koordinatni sustav.

Izmjereni naponski signal iz senzora se oduzima od referentne veličine čiji je model prikazan na slici 4.6.

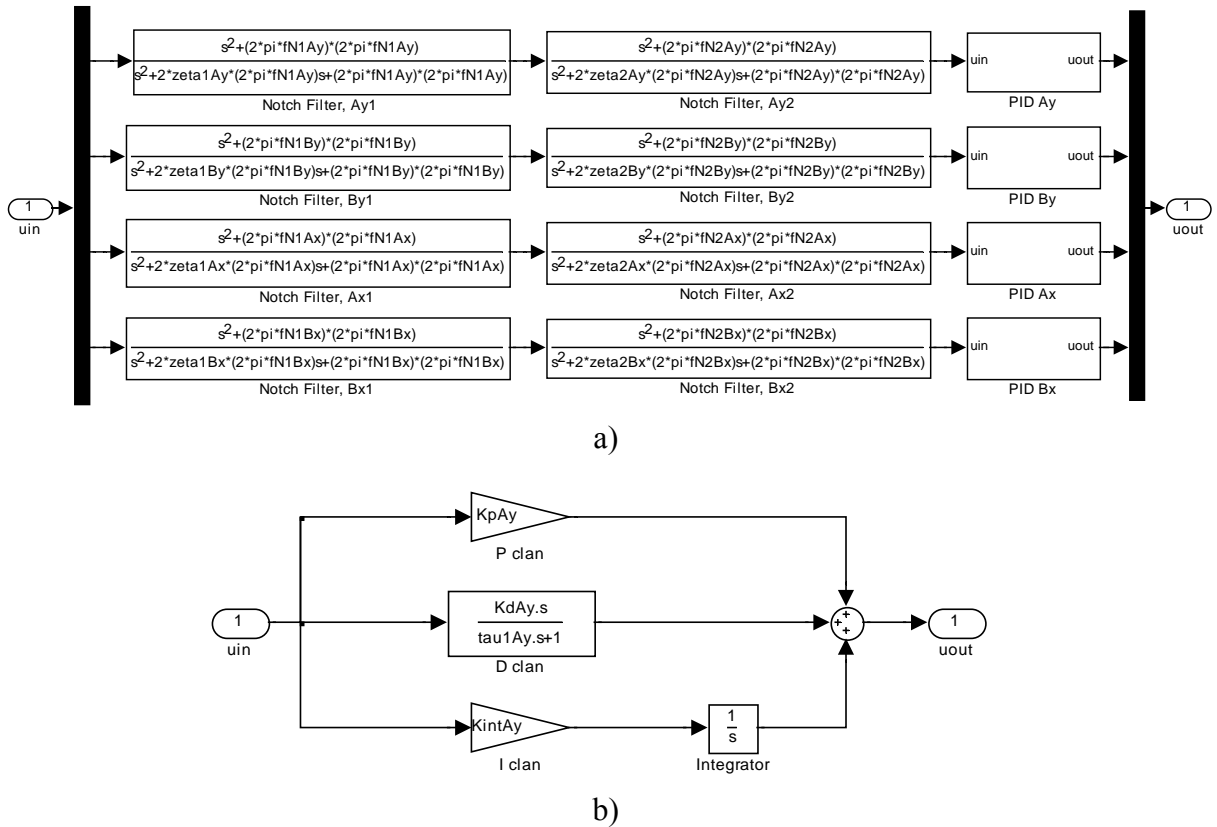


Slika 4.6. Model reference

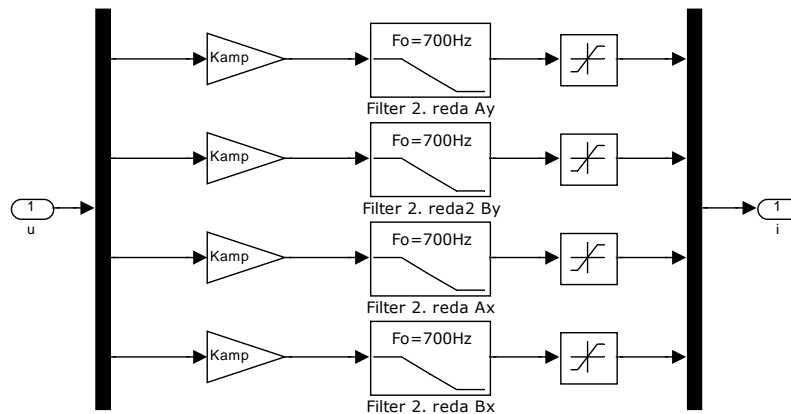
Dobiveni signal greške ulazi u regulator koji u skladu s time proizvodi traženi upravljački signal. Model PID regulatora s *notch* filtrima je prikazan na slici 4.7. Signal iz regulatora se u energetsom pretvaraču pretvara u strujni signal potreban za napajanje zavojnica elektromagneta. Model pretvarača po jednoj osi regulacije je prijenosna funkcija drugog reda (2.46) dobivena na temelju eksperimentalnih frekvencijskih odziva, gdje je pojačanje  $K_{amp} = 0,98$ , granična frekvencija  $f_{amp} = 700$  Hz i prigušenje  $\zeta_{amp} = 0,85$ . Pripadni podsustav pretvarača je prikazan na slici 4.8. U model je uveden i model zasićenja kojim se maksimalna struja u zavojnici ograničava na 10 A.

Na slici 4.9 je prikazan reducirani modela rotora s uključenom težinom rotora i pripadnom strujom kompenzacije težine. Elastični rotor se opisuje pomoću modela prostora u prostoru stanja čija ulazna matrica struja sadrži četiri ulaza (dvije strujne osi regulacije na dva AML), ulazna matrica vanjskih sila ima  $2 \times$  broj masa u sustavu (diskovi, AML) ulaznih

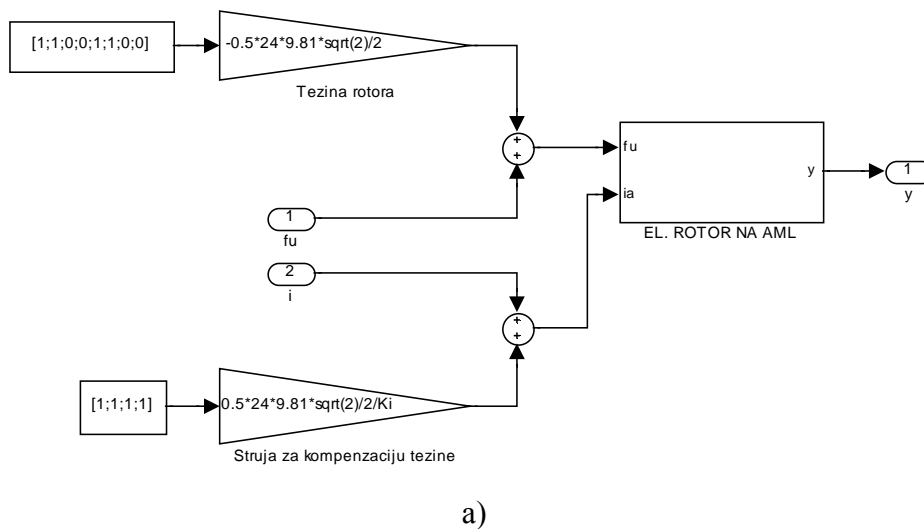
signala koji služe za uvođenje poremećajnih sila te izlazna matrica jednaki broj izlaznih signala od kojih se četiri reguliraju, a preostali (za diskove) služe samo za praćenje pomaka. Prema potrebi numerički kod (datoteka *aml\_red2ss.m*) se može proširiti na način da se omogući uvođenje vanjske sile (npr. sile neuravnoteženja) kao i mjerenje pomaka na proizvoljnom položaju rotora u smjeru njegove uzdužne osi. Opća shema modela u prostoru stanja sa pripadnim jednadžbama je definirana u poglavlju 2.3.4.



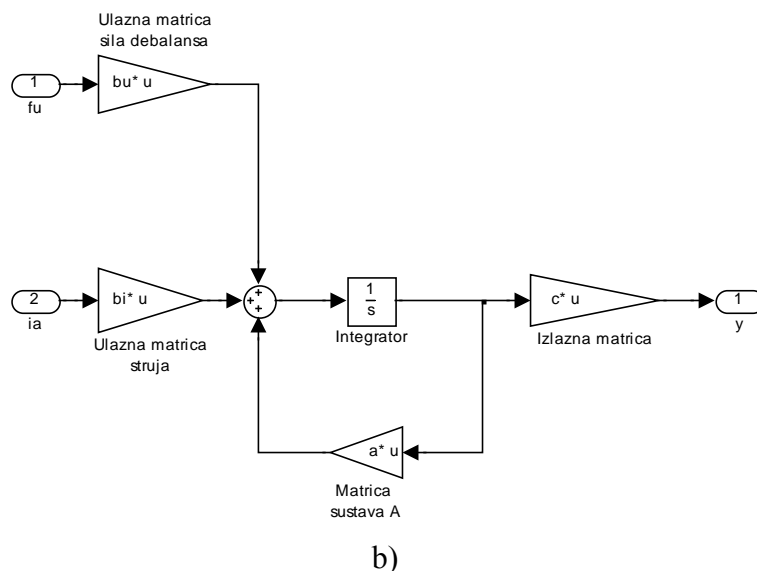
Slika 4.7. a) Model PID regulatora s notch filtrima, b) Podsustav PID regulatora za svaku os regulacije



Slika 4.8. Model energetskog pretvarača



a)



b)

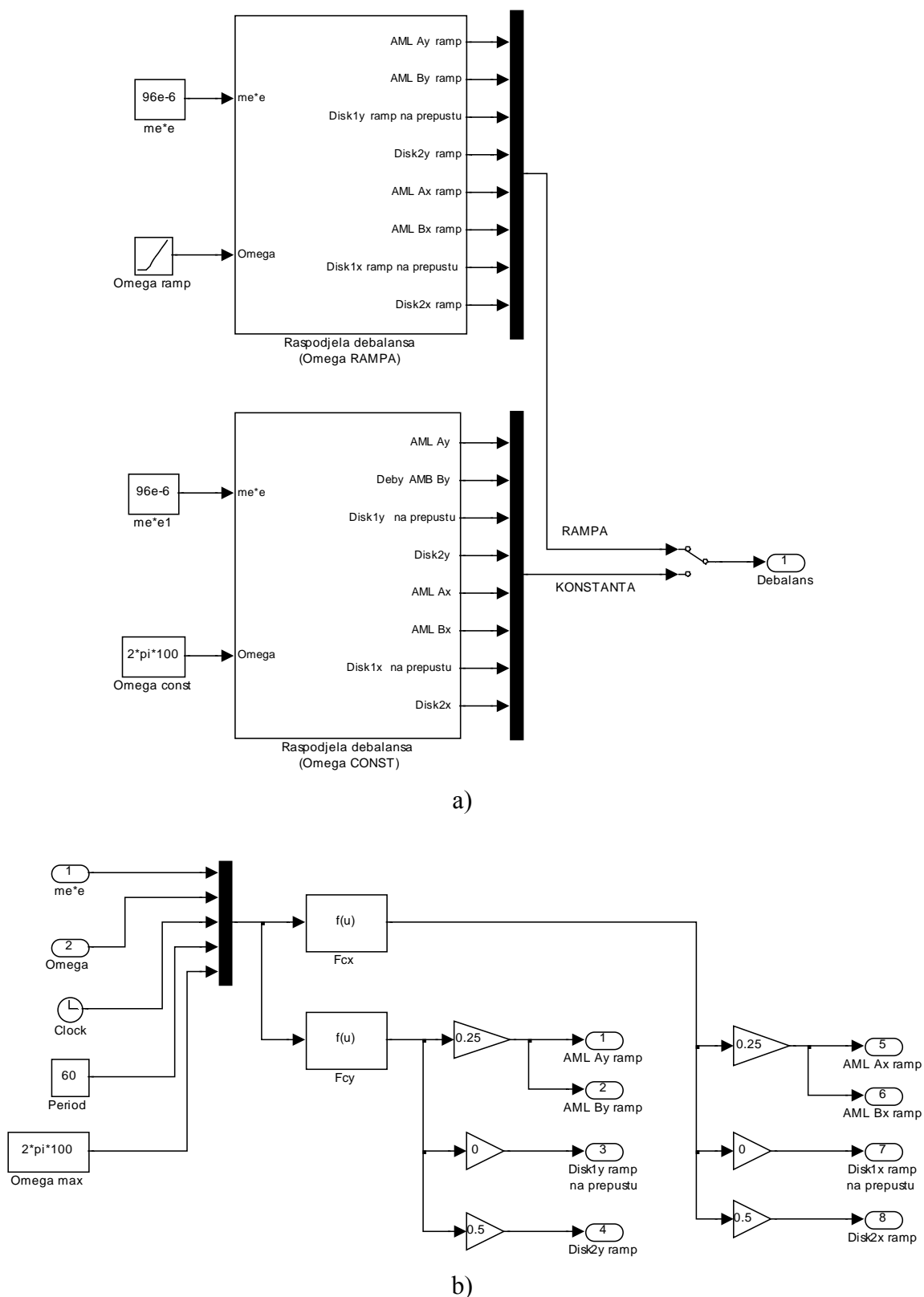
**Slika 4.9.** a) Uključivanje težine rotora u reducirani model, b) model rotora opisan pomoću matrica modela prostora stanja

U sklopu opisanog Simulink modela izrađen je podsustav *Debalans* kojim se definiraju sile neuravnoteženja na konstantnoj ili linearno promjenjivoj brzini vrtnje rotora na pojedinim masama sustava (AML ili diskovima) kao što je prikazano na slici 4.10. Ukupna sila neuravnoteženja je rastavljena na dvije komponente koje na odabranim masama djeluju u smjeru regulacijskih osi  $x$  i  $y$ :

$$\begin{aligned} F_{cx} &= u_e \Omega^2 \cos \Omega t \\ F_{cy} &= u_e \Omega^2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdje je  $u_e$ , kgm veličina zaostalog neuravnoteženja u sustavu.





**Slika 4.10.** a) Model sila neuravnoteženja s konstantnom i linearnom promjenom brzine vrtnje, b) Postotna raspodjela neuravnoteženja po odabranim masama za model s linearnom promjenom brzine vrtnje

#### 4.1.2. Korekcije simulacijskog modela

Kako bi se odredio numerički model koji vjerno predstavlja postojeći stvarni proces, potrebno je provesti potrebne korekcije početnog numeričkog modela. U skladu s time može se provesti sljedeće:

1. *Korekcija*: S obzirom da je posve točan teoretski MKE model rotora gotovo nemoguće odrediti potrebno je provesti njegove dodatne korekcije u skladu s eksperimentalnim mjerenjima na ispitnom stolu za levitirajući rotor u stanju mirovanja. Drugim riječima, traženi model se može odrediti iterativnim postupkom variranja vanjskog i unutarnjeg promjera laminiranog dijela AML čija je krutost nepoznata, odnosno, modificiranjem simulacijski dobivenih vlastitih frekvencija rotora na način da se što bolje usklade s eksperimentalnima [50]. U tablici 4.1. je prikazana usporedba numeričkih i eksperimentalnih vlastitih frekvencija prije i nakon usklađivanja za konfiguraciju rotorskog sustava usvojenu u poglavlju 4.3. Radi provjere točnosti MKE modela iz Matlaba, vlastite frekvencije su dodatno uspoređene s onima koje su dobivene komercijalnim softverom FEMAP (rješavač MSC Nastran), gdje se uočava njihova dobra podudarnost. Prva, druga i treća elastična vlastita frekvencija za prilagođeni MKE model neoslonjenog rotora iznose redom 66,78 Hz, 165,45 Hz i 281,90 Hz.

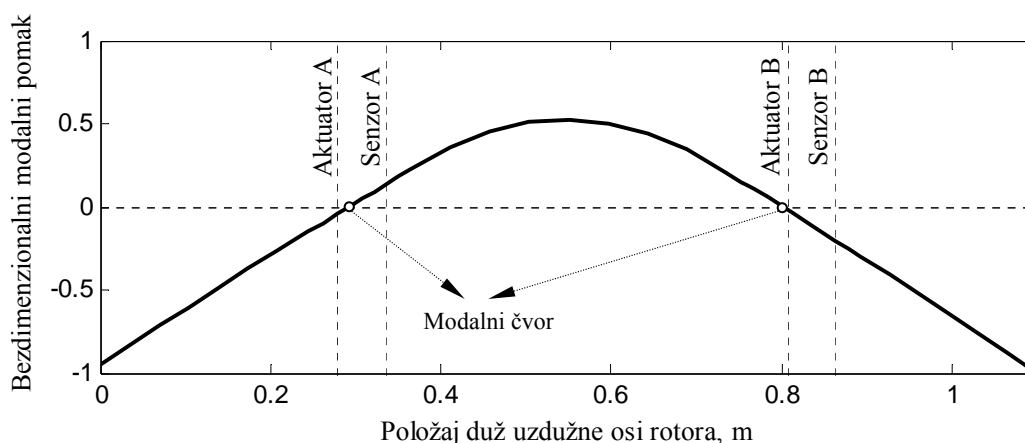
**Tablica 4.1.** Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vlastitih frekvencija prije i nakon njihovog usklađivanja

<i>Vlastita frekvencija, Hz</i>	<i>3D MKE model (MSC Nastran)</i>	<i>MKE model (Matlab)</i>	<i>Prilagođeni MKE model (Matlab)</i>	<i>Eksperimentalni podaci (levitacija)</i>
<i>1. forma</i>	70,6965	68,1669	66,7773	66
<i>2. forma</i>	217,2214	216,2544	165,4477	165
<i>3. forma</i>	407,5026	410,4909	281,9034	283
<i>4. forma</i>	577,9228	669,0938	472,4616	--

2. *Korekcija*: Osim korekcije strukturnog modela, tj. usklađivanja vlastitih frekvencija rotora u simulaciji i eksperimentu, potrebno je osigurati podudarnost frekvencijskih odziva svih komponenata u otvorenom krugu u traženom frekvencijskom rasponu [23], [51]. To je naročito bitno u fazi projektiranja regulatora za neki stvarni proces gdje se traži matematički model cjelovitog sustava, a koji se zbog nedovoljno točnog poznavanja svih njegovih komponenata u mnogim slučajevima ne može odrediti samo primjenom numeričkog modeliranja. U tom se slučaju korekcija provodi na temelju frekvencijskih odziva stvarnog procesa koji se regulira. Ovaj je postupak detaljnije obrazložen na provedenom primjeru u poglavlju 6.1.

## 4.2. Odabir konfiguracije sustava

U sustavima s nekolokacijom posebna se pažnja mora posvetiti obliku formi i položaju modalnog čvora u odnosu na osi senzora i aktuatora (slika 4.11). Ukoliko je isti smješten između osi senzora i aktuatora dolazi do problema stabilizacije sustava i to naročito prilikom prelaska kritičnih brzina u procesima koji se upravljaju s PID regulatorima. Kako bi se u takvim slučajevima izbjegli problemi stabilnog rada sve mase (diskove i AML) je u smjeru uzdužne osi rotora potrebno rasporediti na način da se u slučaju oba AML izbjegne modalni čvor prve forme vibriranja između osi senzora i aktuatora i na taj način omogući točno mjerenje amplituda pomaka rotora na položaju ležaja. U protivnom, potrebno je dobro poznavanje teorije upravljanja i svakako mogućnost njene implementacije u digitalni sustav upravljanja koji radi u stvarnom vremenu, a koja zbog ograničenja sustava upravljanja na eksperimentalnom modelu u ovom radu nije bila omogućena.

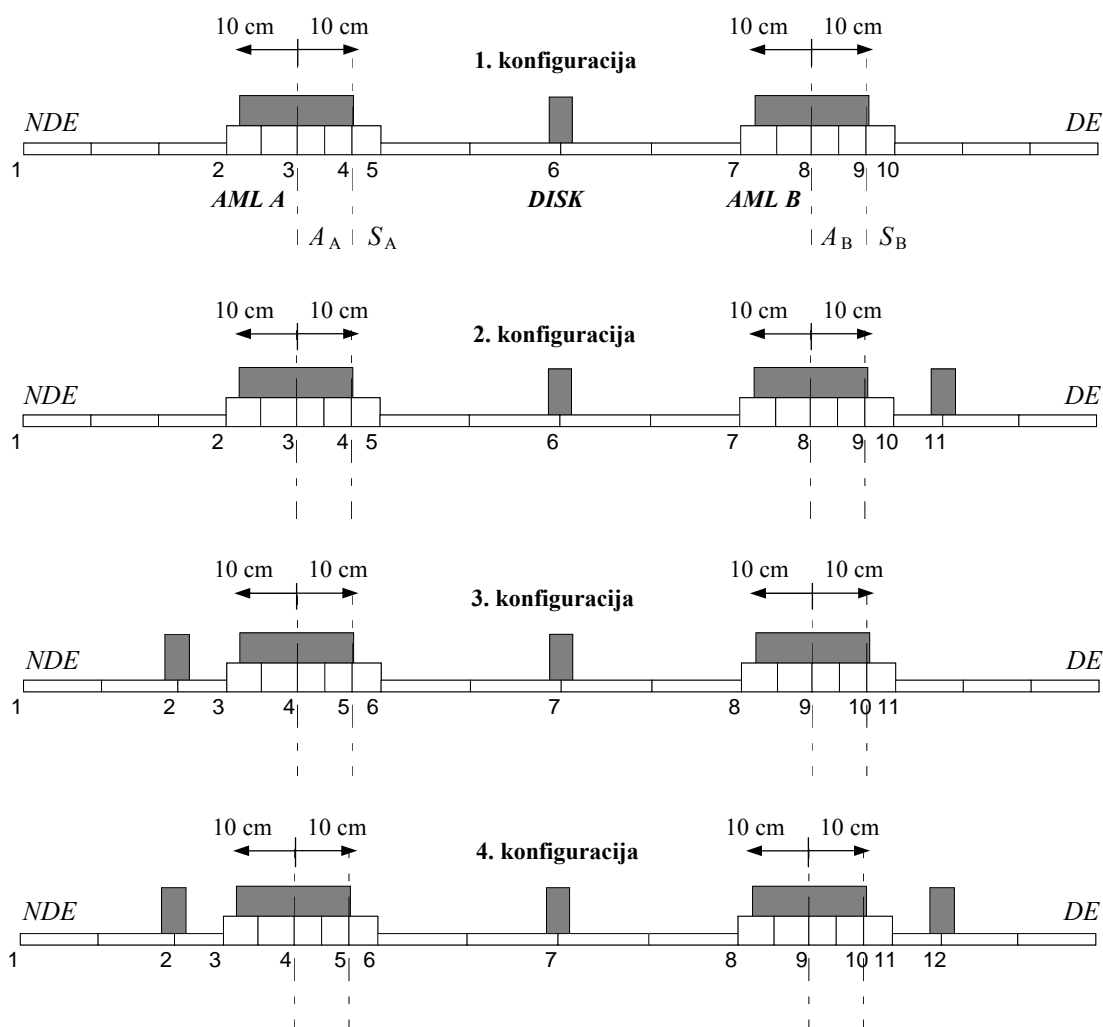


**Slika 4.11.** Prva elastična forma vibriranja (vezana uz 1. konfiguraciju na slici 4.5) s naznačenim položajima modalnih čvorova

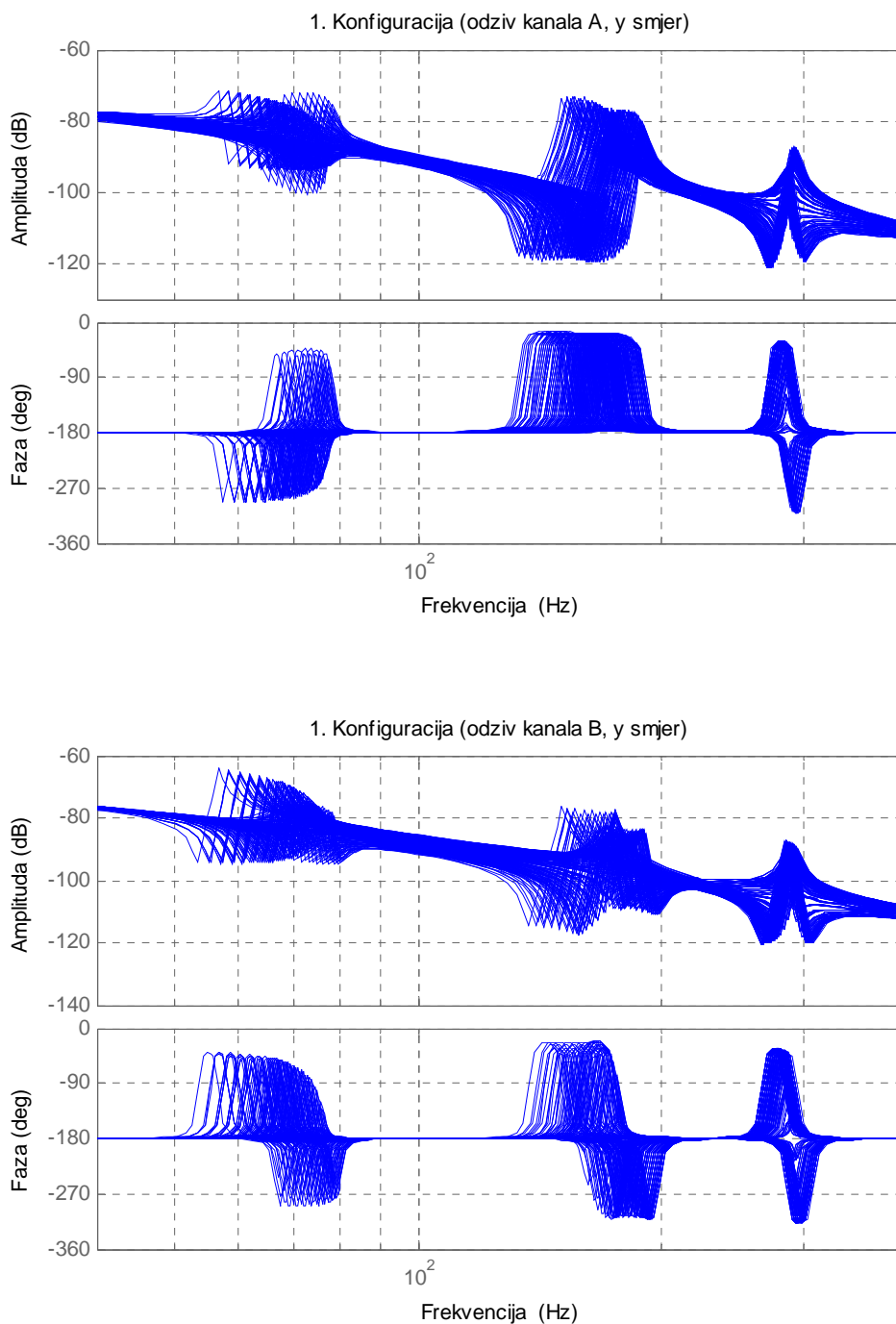
U skladu s postojećom laboratorijskom opremom na slici 4.12 prikazane su četiri konfiguracije rotora s naznačenim smjerovima i maksimalnim dopuštenim vrijednostima pomaka AML koje su uzete u razmatranje. Konfiguracija 1 je osnovna te se sastoji od dva AML i jednog diska na sredini raspona između njih. U konfiguracijama 2, 3 i 4 su ugrađeni dodatni diskovi na prepustima, prema slici. Zatamnjeni dijelovi predstavljaju koncentrirane mase (AML A, AML B i diskove) smještene u čvorove, dok su položaji aktuatora i senzora označeni sa  $A_A$  i  $A_B$  te  $S_A$  i  $S_B$ , respektivno. Materijal rotora je standardni čelik modula elastičnosti  $E = 210$  GPa i gustoće  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. Početna udaljenost između osi u kojima djeluju sile aktuatora iznosi 528 mm, a ukupna duljina rotora 1100 mm. Masa svakog diska i svakog laminiranog dijela AML iznosi 2 kg i 8 kg, respektivno, dok je ukupna masa rotora 24 kg. Za svaku prikazanu konfiguraciju izrađen je algoritam koji varira položaje naznačenih

masa (AML A, AML B) po koracima od 1 cm unutar dopuštenog raspona pomaka. U svakom koraku iteracije određuje se vlastiti vektor za prvu formu vibriranja normaliziran s obzirom na element s maksimalnom vrijednošću i očitavaju odgovarajuće amplitude na položajima senzora i aktuatora za oba AML. Zadovoljavajuća konfiguracija se pronalazi u trenutku kada su predznaci amplituda pomaka u parovima aktuator/senzor jednaki u slučaju oba AML.

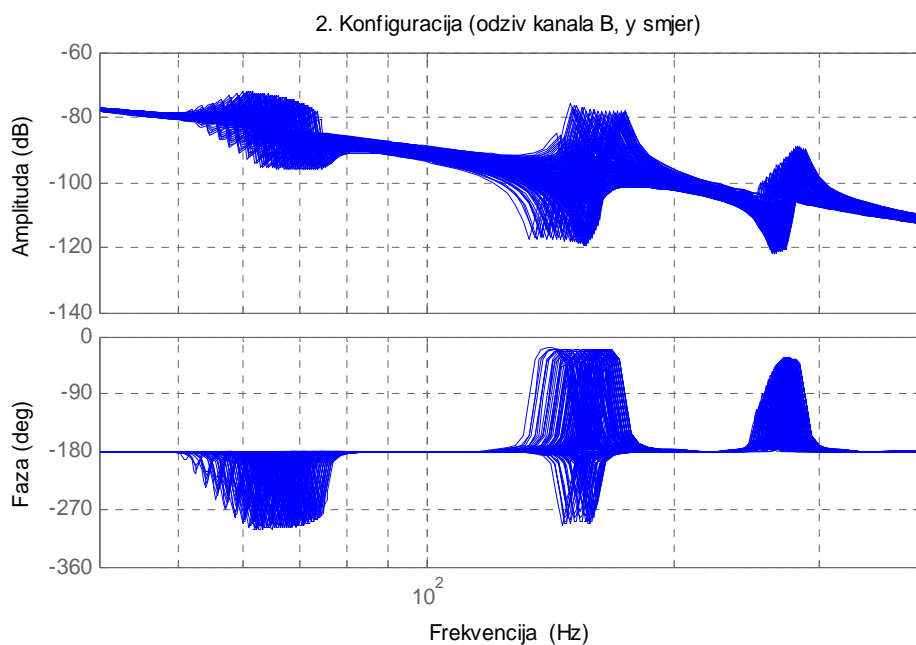
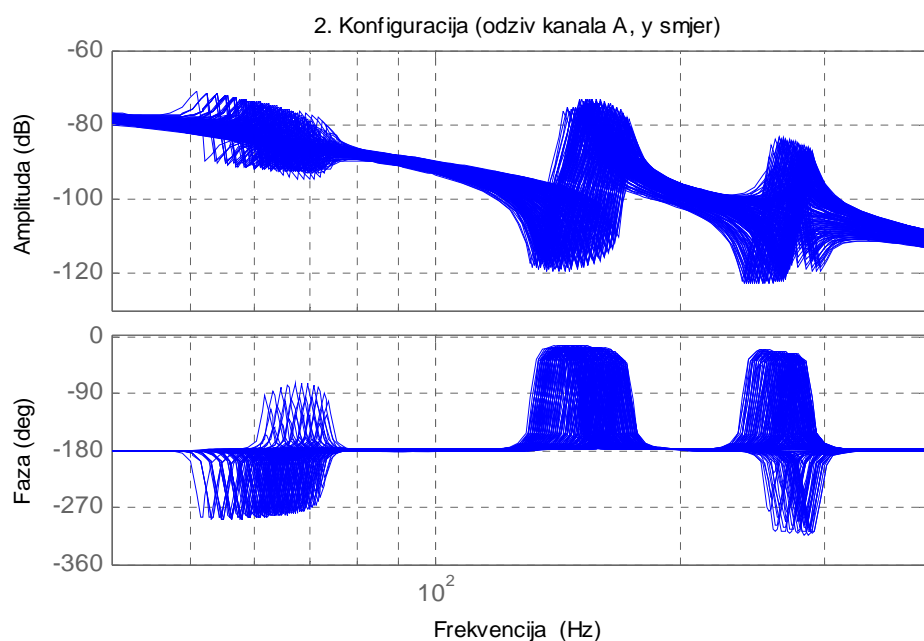
Na slikama 4.13 – 4.16 prikazani su frekvencijski odzivi za odabrane regulacijske kanale (AML A u  $y$  smjeru i AMLB u  $y$  smjeru) kroz sve iteracijske korake za slučaj kada su svi diskovi smješteni na prepustu 5 cm od odgovarajućih ležajeva. Zbog nespregnutosti gibanja u dvije međusobno okomite ravnine ( $xz$  i  $yz$ ) odzivi na jednom ležaju su jednaki u oba smjera gibanja ( $x$  i  $y$ ).



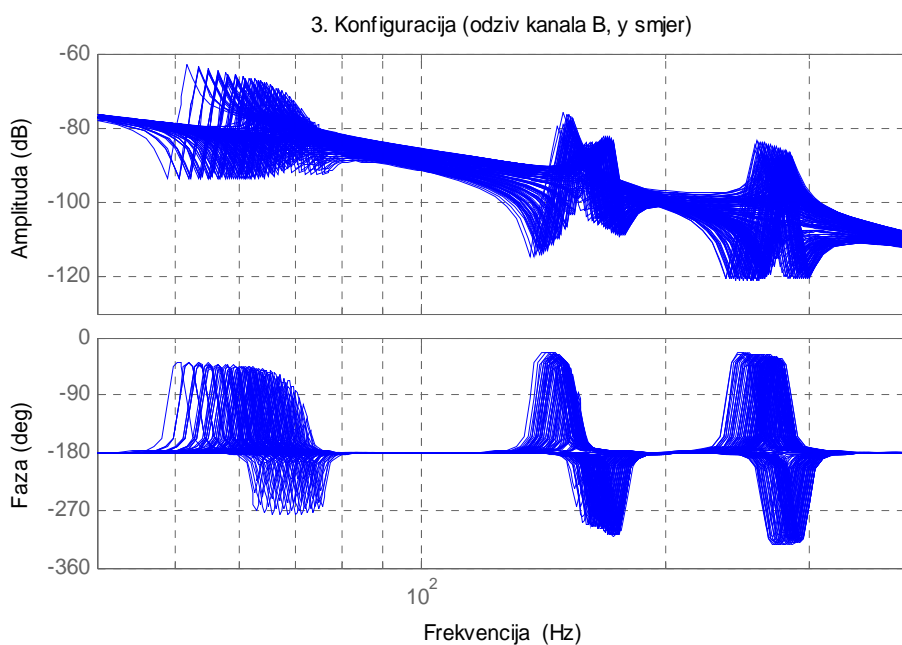
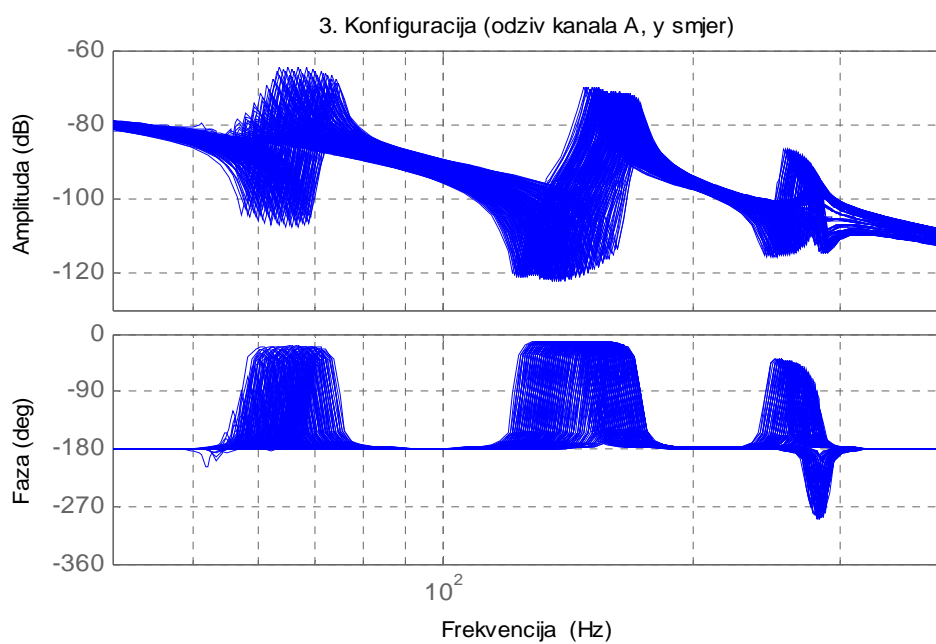
Slika 4.12. Konfiguracije ispitnog stola (MKE, Matlab)



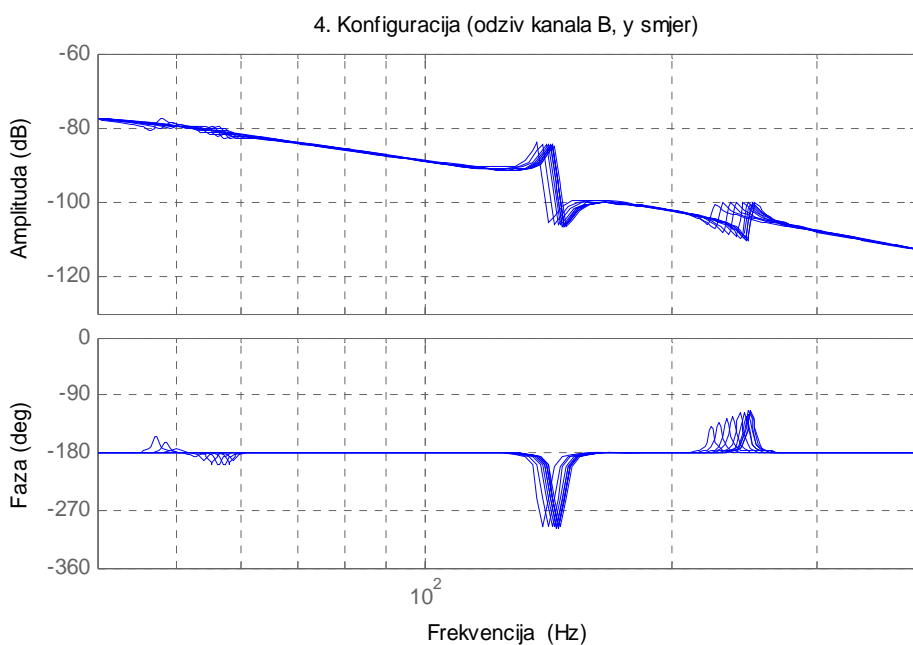
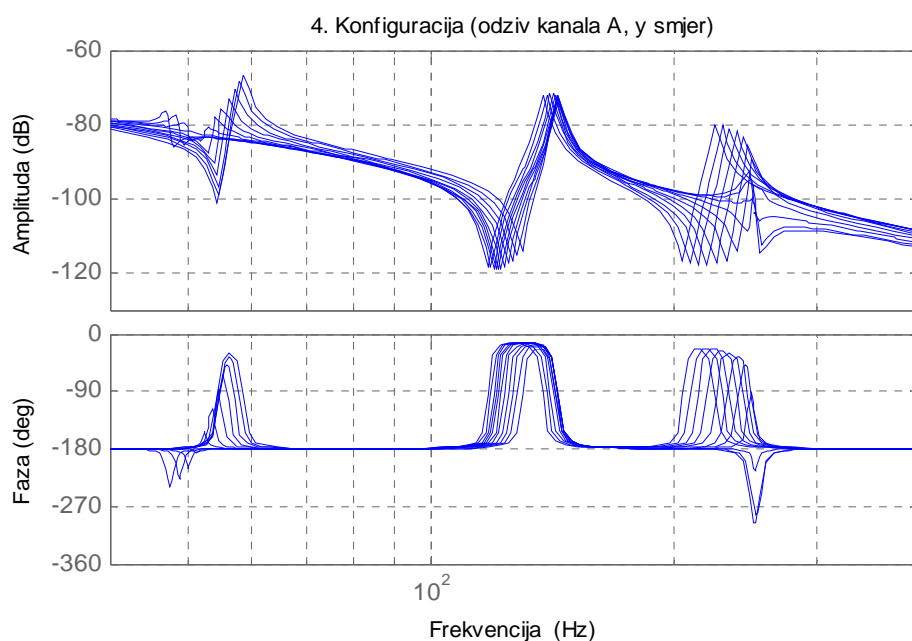
**Slika 4.13.** Frekvencijski odziv 1. konfiguracije za prvi (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru – slika gore) i drugi (od aktuatora B u y smjeru, do pripadnog senzora B u y smjeru – slika dolje) kanal  $4 \times 4$  MIMO neoslonjenog rotorskog sustava



**Slika 4.14.** Frekvencijski odziv 2. konfiguracije za prvi (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru – slika gore) i drugi (od aktuatora B u y smjeru, do pripadnog senzora B u y smjeru – slika dolje) kanal  $4 \times 4$  MIMO neoslonjenog rotorskog sustava



**Slika 4.15.** Frekvencijski odziv 3. konfiguracije za prvi (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru – slika gore) i drugi (od aktuatora B u y smjeru, do pripadnog senzora B u y smjeru – slika dolje) kanal  $4 \times 4$  MIMO neoslonjenog rotorskog sustava

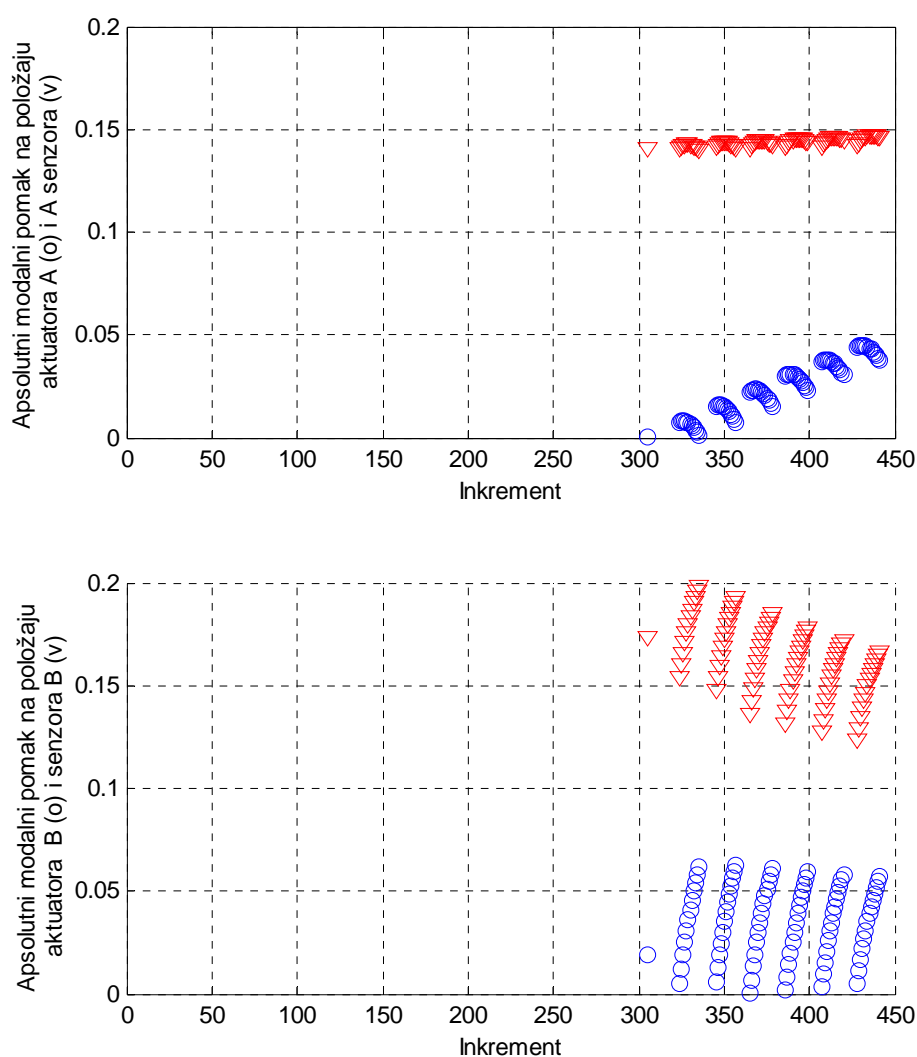


**Slika 4.16.** Frekvencijski odziv 4. konfiguracije za prvi (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru – slika gore) i drugi (od aktuatora B u y smjeru, do pripadnog senzora B u y smjeru – slika dolje) kanal  $4 \times 4$  MIMO neoslonjenog rotorskog sustava

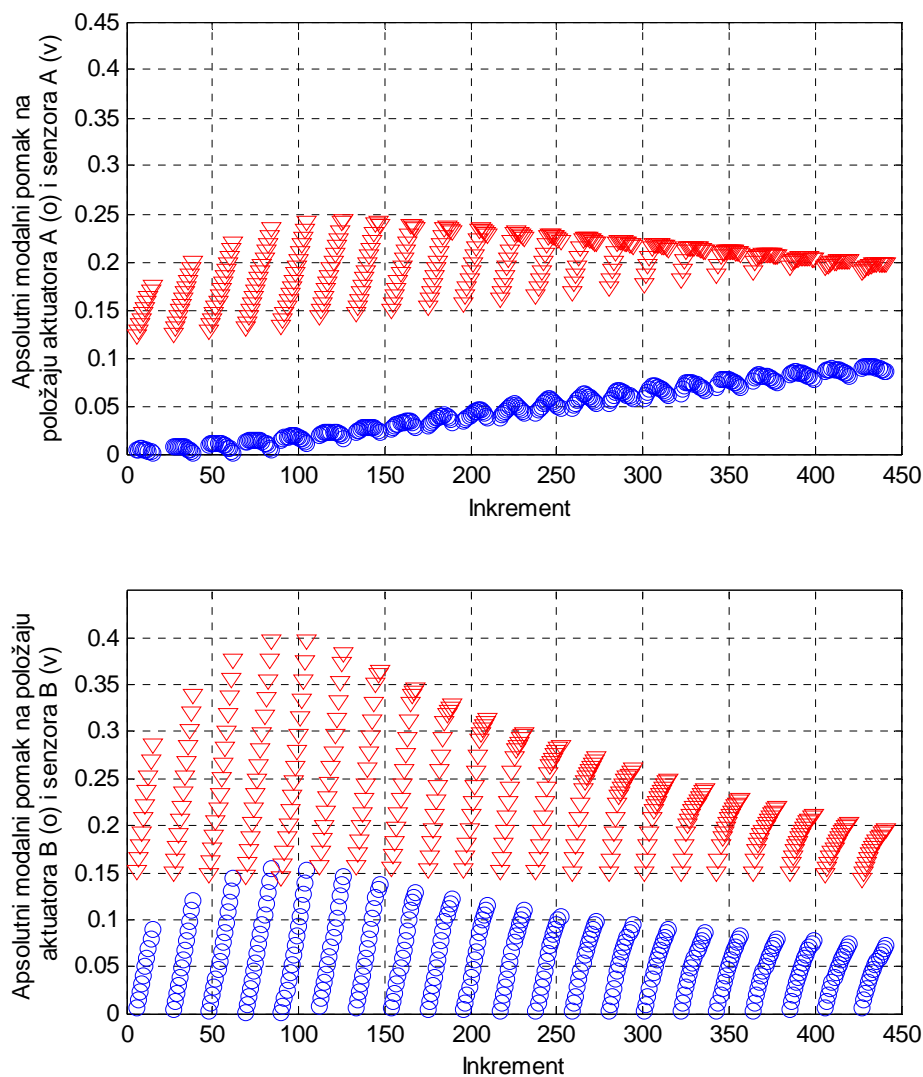


Na temelju prikazanih frekvencijskih odziva uočava se da 1. i 3. konfiguracija mogu ponuditi očekivanu stabilnost rotorskog sustava (nula ispred pola i faze više od  $-180^\circ$  na prvoj formi istovremeno na oba promatrana kanala) u nekim specifičnim položajima AML, dok 2. i 4. rotorska konfiguracija ne omogućavaju stabilnosti niti u jednom od promatranih položaja AML (pol ispred nule i faze manje od  $-180^\circ$  na prvoj formi u svakom trenutku na nekom od oba promatrana AML).

U sklopu daljnje analize 1. i 3. konfiguracije određeni su apsolutni modalni pomaci na položajima aktuatora A i senzora A te aktuatora B i senzora B, po inkrementima za sve parove aktuator/senzor koji osiguravaju stabilnost u danim uvjetima (slike 4.17 i 4.18).



**Slika 4.17.** Apsolutni modalni pomaci po iteracijama na položajima aktuatora (o, plavo) i senzora ( $\Delta$ , crveno) u 1. konfiguraciji za AML A (slika gore) i AML B (slika dolje)



**Slika 4.18.** Apsolutni modalni pomaci po iteracijama na položajima aktuatora ( $\circ$ , plavo) i senzora ( $\Delta$ , crveno) u 3. konfiguraciji za AML A (slika gore) i AML B (slika dolje)

Iz danih prikaza mogu se uočiti manji modalni pomaci ( $< 0,05$ ) u svim položajima 1. konfiguracije na AML A te se stoga zbog osiguravanja bolje upravljivosti i mjerljivosti (veći modalni pomaci) 3. konfiguracija odabire kao referentna.

Na temelju rezultata simulacije i iznesenih zapažanja, gledajući s aspekta nekolokacije, upravljivosti i mjerljivosti u danim uvjetima, najveći modalni pomaci će se postići ukoliko se usvoji 3. konfiguracija s diskom na slobodnom prepustu uz pomicanje AML A i AML B redom za minimalno 7 cm i 9 cm prema motoru (DE, engl. *Drive End*). Te su veličine dobivene direktno u obliku ispisa pokretanjem izrađenog Matlab algoritma vezanog za 3. konfiguraciju čiji je izvršni dio dan u prilogu D:

-----  
 Pokretanje algoritma

=====

Koliko iznosi dopušteni pomak AML A u smjeru NDE (max 0.1 m)?

Koliko iznosi dopušteni pomak AML A u smjeru DE (default 0.1 m)?

Koliko iznosi dopušteni pomak AML B u smjeru NDE (default 0.1 m)?

Koliko iznosi dopušteni pomak AML B u smjeru DE (max 0.1 m)?

Koliko iznosi korak pomaka (default 0.01 m)?

Koliko iznosi minimalni traženi normalizirani pomak 1. forme na položaju senzora i aktuatora (0-1) (default 0.03)? 0.075

Traženi pomaci AML u danim ograničenjima:

-----

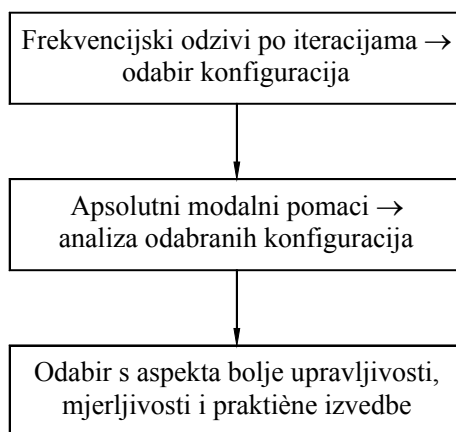
(1) AML A pomaknuti za 0.07 m, a AML B za 0.09 m.

(2) AML A pomaknuti za 0.08 m, a AML B za 0.1 m.

Predznak (-) označava pomak u smjeru NDE, a predznak (+) u smjeru DE (prema motoru).

Međutim, kako bi to zahtijevalo veće modifikacije strukture te istovremeno dovelo do malih poboljšanja u konačnoj veličini promatranih modalnih pomaka, usvojena je 3. konfiguracija s dva diska, od kojih je jedan smješten na sredini raspona između ležajeva, a drugi na slobodnom prepustu 5 cm i dva AML u postojećem položaju. Odabir takve konfiguracije se pokazao opravdanim eksperimentalnom verifikacijom koja je uključivala prolazak prve kritične brzine.

Gore provedeni postupak se sistematično može prikazati u obliku shematskog prikaza na slici 4.19.

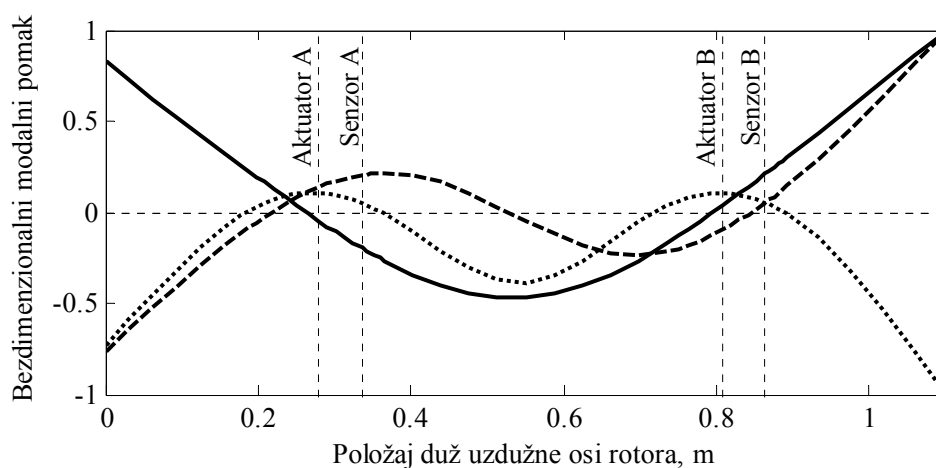


**Slika 4.19.** Shematski prikaz postupka odabira rotorske konfiguracije s nekolokacijom

Na temelju odabrane konfiguracije prema predloženom postupku provedena su sva daljnja istraživanja te izrada eksperimentalnog ispitnog stola.

### 4.3. Dinamička analiza neoslonjenog rotora

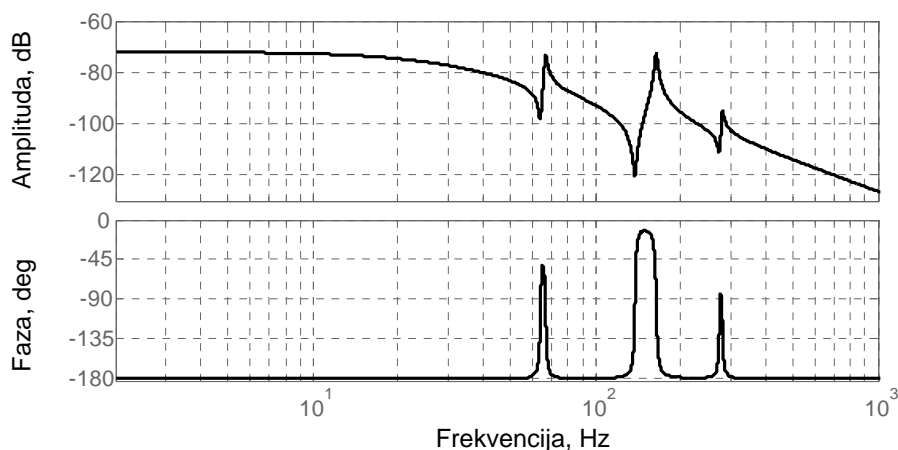
U ovom su poglavlju za konfiguraciju odabranu u poglavlju 4.3 provedene relevantne dinamičke analize. Važan dinamički zahtjev koji se javlja prilikom projektiranja sustava upravljanja jest da sve forme vibriranja koje se mogu pobuditi za vrijeme rada moraju biti upravljive i mjerljive [53]. To znači da aktuatori i senzori moraju biti smješteni na položajima u kojem postoji dovoljna amplituda pomaka, tj. ne u modalni čvor. Tri elastične forme vibriranja za rotorsku konfiguraciju usvojenu u poglavlju 4.3 su dane na slici 4.20, odakle se može uočiti da je svaka od njih upravljiva i mjerljiva, dok se preostale više forme koje nisu prikazane nalaze izvan frekvencijskog raspona AML sustava te niti nisu od interesa za promatranje. Iako bi bolja upravljivost prve forme, tj. veći modalni pomak na položaju oba aktuatora bio prikladniji, u danim uvjetima to se nije uspjelo postići. Međutim, uspješan prolazak prve kritične brzine (detalji u poglavlju 5) opravdava valjanost odabrane konfiguracije. Sa slike se dodatno uočava da druga forma posjeduje modalni čvor između aktuatora B i senzora B. S aspekta dizajna regulatora, u ovom slučaju, to ne bi trebalo predstavljati značajniji problem s obzirom da je očekivana radna brzina rotora (100 Hz) značajno niža od druge vlastite frekvencije (165 Hz). U protivnom, posebna bi se pažnja morala posvetiti dizajnu regulatora jer je na pripadnoj vlastitoj frekvenciji primijenjena sila  $180^\circ$  izvan faze u odnosu na izmjereni pomak.



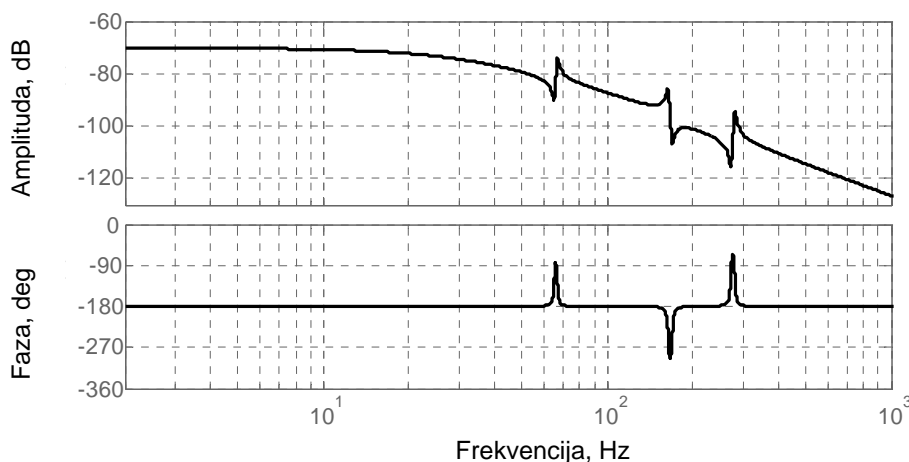
Slika 4.20. Forme vibriranja neoslonjenog rotora

Na slikama 4.21 i 4.22 su prikazani frekvencijski odzivi neoslonjenog elastičnog rotora koji opisuju odnos ulazne sile na položaju aktuatora A i B u  $y$  smjeru i izmjerenog pomaka rotora na položaju pripadnih senzora. Oštra rezonantna izdizanja na amplitudnim dijagramima odgovaraju redom prvoj, drugoj i trećoj slabo prigušenoj elastičnoj formi vibriranja. Pri tome se pravilno izmjenjivanje polova i nula (nula – pol – nula – pol – ...) prekida u slučaju AML

B na frekvenciji koja odgovara drugoj elastičnoj formi (pol ispred nule). Takva je pojava karakteristična za sustave s nekolokacijom i to za one forme vibriranja čiji se modalni čvor javlja između položaja senzora i aktuatora. Na frekvencijama koje odgovaraju pripadnoj formi istovremeno dolazi i do pojave faznog kašnjenja, a uslijed toga i do problema pri stabilizaciji sustava prilikom prelaska preko pripadne kritične brzine. Ovo je zapažanje u skladu s položajem modalnih čvorova na slici 4.20.

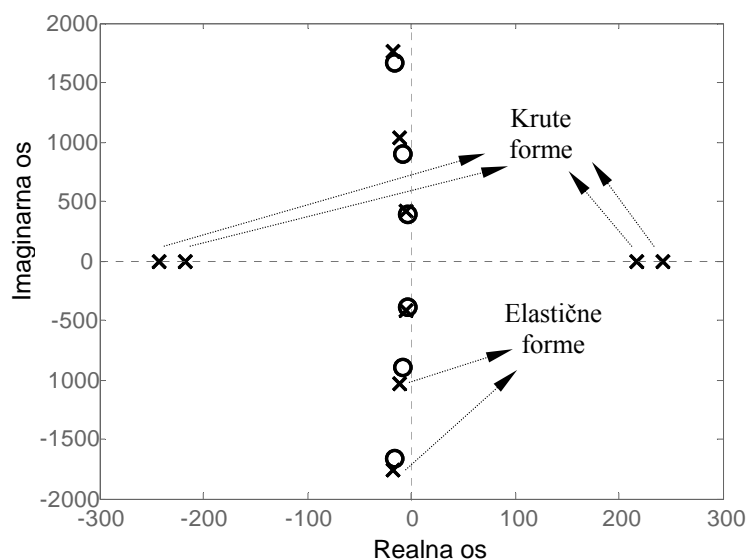


**Slika 4.21.** Frekvencijski odziv za prvi kanal  $4 \times 4$  MIMO neoslonjenog rotorskog sustava pri 0 okr/min (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru)



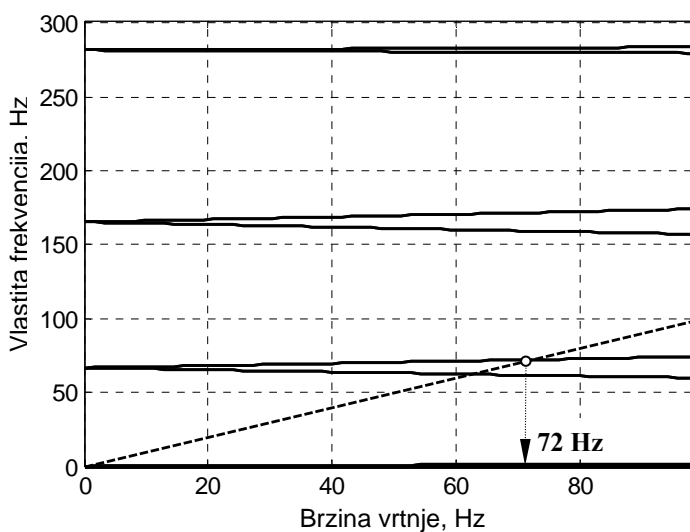
**Slika 4.22.** Frekvencijski odziv za drugi kanal  $4 \times 4$  MIMO neoslonjenog rotorskog sustava pri 0 okr/min (od aktuatora B u y-smjeru, do pripadnog senzora B u y-smjeru)

Za razliku od elastičnih forme, krute forme vibriranja su jako prigušene te obično ne dolaze do izražaja u Bodeovim dijagramima. Njihova se pojava može uočiti iz dijagrama nula i polova u kompleksnoj ravnini, gdje se javljaju u obliku polova koji su smješteni na realnoj osi (slika 4.23).



Slika 4.23. Polovi (x) i nule (o) elastičnog rotora oslonjenog na AML

Ukoliko se uzme da je brzina rotacije  $\Omega = 0$  rotor će imati dvije identične vlastite frekvencije. Povećanjem brzine gibanje u dvije međusobno okomite ravnine postaje spregnuto giroskopskom matricom  $\mathbf{G}$ , a postojeća dvostruka forma se rastavlja na dvije, naprednu i natražnu, kao što je prikazano na Campbelllovom dijagramu na slici 4.24.



Slika 4.24. Campbelllov dijagram

Pod pretpostavkom da je rotor pridržavan na homogenim ležajevima sile neuravnoteženja mogu pobuditi samo naprednu kritičnu brzinu rotora koja u ovom slučaju iznosi 72 Hz (sjecište pravca prvog harmonika brzine vrtnje s naprednom formom).





## **Poglavlje 5.**

# **Eksperimentalni model**

U ovom je poglavlju predstavljen eksperimentalni ispitni stol za analizu dinamike elastičnog rotora oslonjenog na AML. Eksperimentalni uređaj je sastavljen za potrebe ovog istraživanja te služi za potvrdu učinkovitosti numeričkog modela.

### **5.1. Konfiguracija ispitnog stola**

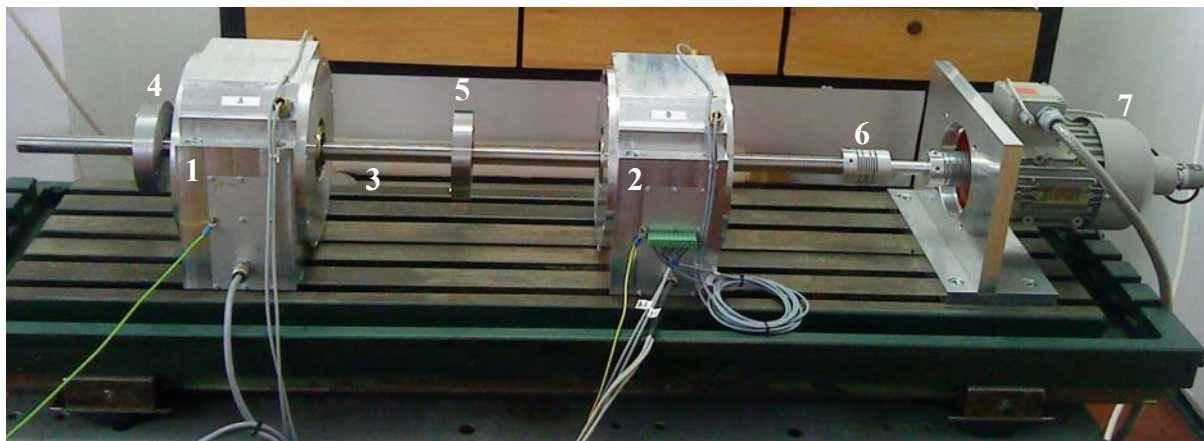
Konfiguracija ispitnog stola s AML se sastoji od dva radijalna AML dobavljena od proizvođača Mecatronix GmbH (Darmstadt, Njemačka), elastične osovine s dva dodatna diska, elektromotora te elastične spojke koja omogućuje povezivanje osovine s motorom i smanjenje utjecaja momenata i radijalnih sila koji mogu nastati u slučaju nesavršenog poravnanja njihovih centralnih osi (slika 5.1). S obzirom da se u sustavu ne javljaju značajnija aksijalna opterećenja ova konfiguracija ne posjeduje dodatni aksijalni AML zbog čega se pridržavanje u uzdužnom smjeru provodi samo pomoću kugličnih ležaja motora. Broj diskova i njihov raspored u smjeru uzdužne osi rotora je odabran u skladu s rezultatima simulacijskog modela iz poglavlja 4.2. Na taj se način u slučaju oba AML izbjegnuo modalni čvor prve forme vibriranja između odgovarajućih parova senzor-aktuator i osigurali uvjeti za prelazak prve kritične brzine.

Rotor je izrađen na način da s obzirom na svoje dimenzije i masu posjeduje relativno niske vlastite frekvencije što omogućava sigurnija ispitivanja uslijed prolaska kroz niže pripadne kritične brzine. Masa laminiranog rotorskog dijela jednog AML iznosi 8 kg, dok su duljina i promjer elastične osovine redom 1100 mm i 25 mm. Promjer i širina krutih diskova iznose redom 120 mm i širine 25 mm. Uz te karakteristike osovine i diskova ukupna masa

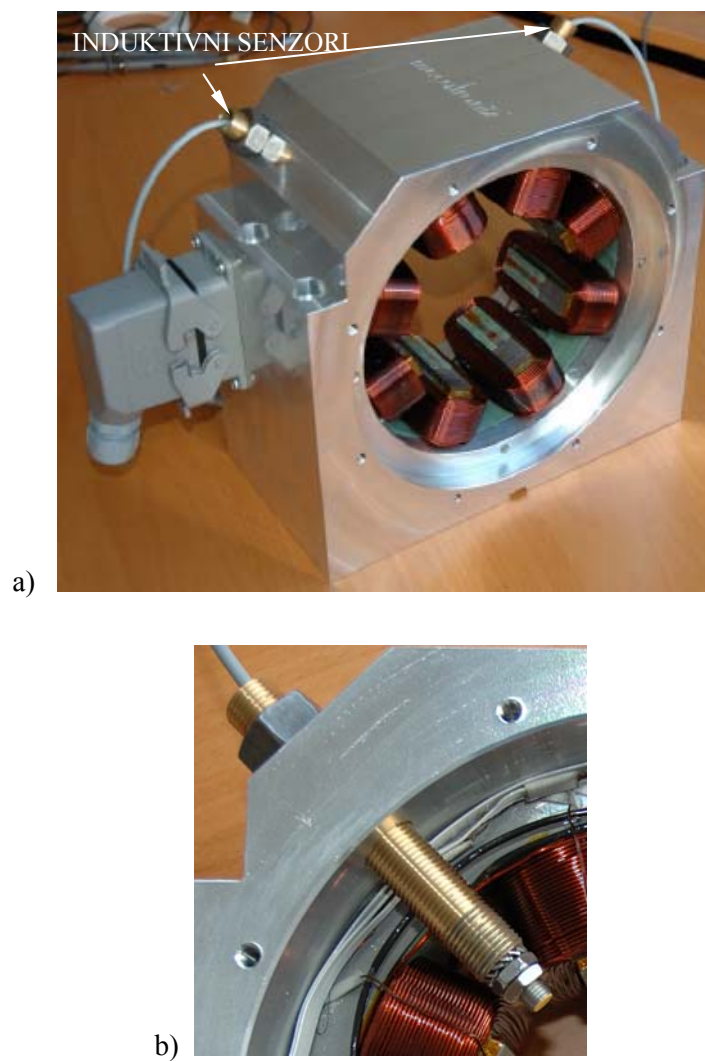
rotora iznosi 24 kg, a prva vlastita frekvencija rotora ( $f_1 = 66$  Hz) leži unutar radnog raspona brzina (0 – 150 Hz).

Statorski dio AML ima osam polova (četiri para elektromagneta) dok su u poklopce kućišta ugrađeni prihvatni kuglični ležajevi (ukupno dva po AML) čija je uloga zaštita elektromagnetskih polova u slučaju naglog gubitka napajanja, zasićenja AML ili kontakta uslijed neprihvatljivo velikih sila opterećenja. Zračnost između rotora i elektromagnetskih polova iznosi 1,25 mm, dok je s ciljem njihove zaštite uslijed pojave kontakta između rotora i statora, zračnost do prihvatnih ležajeva manja i iznosi 0,3 mm. Na slici 5.2 je prikazano otvoreno kućište AML sa statorskim zavojnicama i naznačenim položajima senzora. Može se uočiti da svaki AML ima dva induktivna senzora smještena pod kutom  $90^\circ$  u ravnini mjerenja te s kutnom orijentacijom  $\pm 45^\circ$  u odnosu na vertikalnu ravninu. Ravnina u kojoj leže senzori se nalazi na udaljenosti 56 mm od ravnine u kojoj djeluje elektromagnetski aktuator. Slika 5.3 prikazuje rotorski dio AML i poklopac kućišta s prihvatnim ležajevima. Detaljniji tehnički podaci su dani u tablici 5.1.

S obzirom na četiri radijalne osi regulacije (dviije po AML) sustav se regulira s ukupno četiri SISO regulatora temeljena na PID algoritmu. U sustav je ugrađeno osam energetskih pretvarača (dva za svaku os regulacije) čiji je maksimalni napon 300 V, dok je maksimalna struja u zavojnici ograničena na 10 A. Frekvencijski odziv energetskog pretvarača zajedno s odgovarajućom prijenosnom funkcijom drugog reda koja opisuje njegovu dinamiku je prikazan na slici 5.4.



**Slika 5.1.** Ispitni stol: (1) radijalni AML A, (2) radijalni AML B, (3) elastična osovina, (4) disk 1, (5) disk 2 (6) elastična spojka, (7) elektromotor



Slika 5.2. a) Kućište AML sa statorskim zavojnicama i induktivnim sensorima, b) detalj senzora

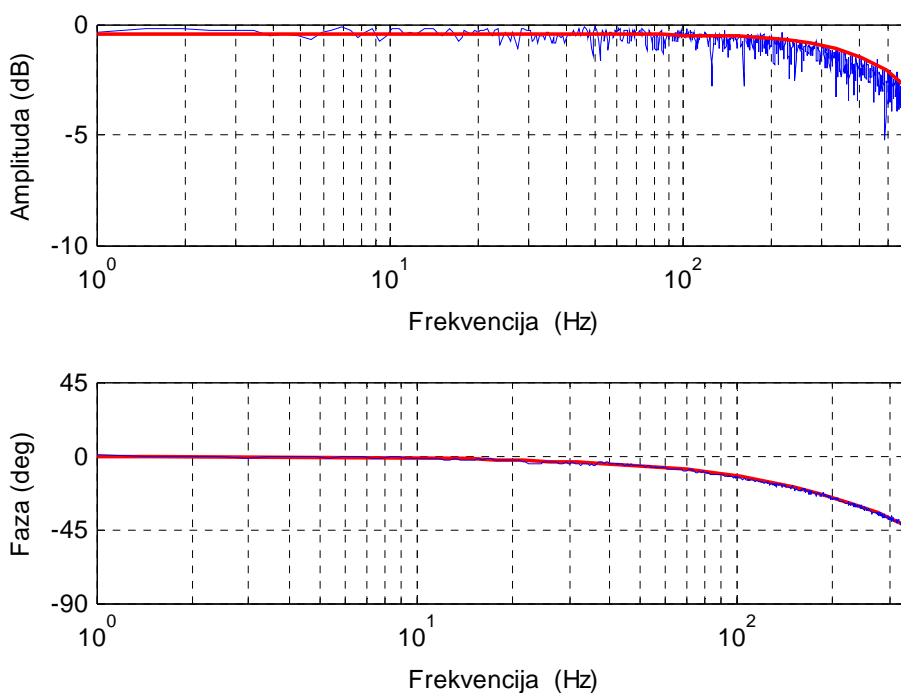


Slika 5.3. Rotorski dio AML (lijevo) i poklopac kućišta s prihvatnim ležajevima (desno)

Tablica 5.1. Tehnički podaci ispitnog stola

<b><i>Osovina</i></b>	
Duljina, $L$	1100 mm
Promjer, $d$	25 mm
Modul elastičnosti, $E$	210 GPa
Gustoća, $\rho$	7800 kg/m <sup>2</sup>
<b><i>Radijalni AML</i></b>	
Duljina laminiranog dijela rotora	65 mm
Maksimalna sila po paru polova	1000 N
Koeficijent sila-struja, $k_i$	190 N/A
Koeficijent sila-pomak, $k_s$	680000 N/m
Otpor zavojnice	0,57 $\Omega$
Induktivitet zavojnice	26,48 mmH
Maksimalna struja u zavojnici	10 A
Maksimalni broj okretaja rotora	9000 okr/min (150 Hz)
Maksimalna temperatura pretvarača	100 °C
Maksimalni napon pretvarača	300 V
Zračnost do prihvatnih ležajeva	0,3 mm
Zračnost do magnetskih polova	1,25 mm
Mjerno područje senzora	0,25 – 1,25 mm
Osjetljivost senzora	8000 V/m
Frekvencija uzorkovanja senzora	2 kHz

Korisnička interakcija s eksperimentalnim ispitnim stolom se izvodi pomoću PC računala na kojem je instalirana Windows aplikacija MXCo 8.2.6 (Mecatronics, Darmstadt) koja omogućuje podešavanje parametara regulatora, praćenje signala, kao i mjerenje prijenosnih funkcija frekvencijskih odziva sustava.



**Slika 5.4.** Bodeov dijagram energetske pretvarača (od ulaznog napona upravljanja do izlazne struje u zavojnicama AML): simulacija (crveno), eksperiment (plavo)

## 5.2. Priprema eksperimentalnog sustava

Prvi preduvjet za uspješno provođenje eksperimentalnih mjerenja je kalibracija induktivnih senzora na oba AML kako bi se osiguralo točno mjerenje pomaka i centriranje istih u zračnom prostoru između rotora i statora. U početnom položaju rotor je pridržavan na prihvatnim ležajevima, a senzori se podese na maksimalnu prihvatljivu udaljenost 1,25 mm od mjernog objekta (rotora), tj. na gornju granicu mjernog područja. U tim uvjetima sva PID pojačanja sustava su isključena (nema regulacije), a sustav se na položaju ležaja koji se kalibrira pobuđuje sa sinusnim signalom konstantne frekvencije u smjeru obje osi mjerenja. Amplituda signala se u malim inkrementima povećava sve do trenutka kada orbita rotora postane kružna i rotor počinje gibanje na prihvatnim ležajevima. U tim se uvjetima senzori postepeno približe prema mjernom objektu (rotoru) te učvrste u položaju u kojem senzor pokriva cijelo mjerno područje i u kojem je pripadno gibanje simetrično s obzirom na centralni položaj.

Nakon što je mehanički dio sustava u potpunosti podešen (kalibracija senzora, rasporedi diskova i AML u skladu s rezultatima simulacije) potrebno je podesiti upravljački sustav, što uključuje određivanje pojačanja PID regulatora te odabir frekvencija *notch* filtara. Taj se postupak sastoji od slijedećih koraka; u prvom se koraku podešavaju pojačanja regulatora za

svaki ležaj zasebno te se odabiru minimalne vrijednosti proporcionalnog, derivacijskog i integracijskog pojačanja koje dovode do stabilne levitacije, u drugom koraku se u skladu s frekvencijskim odzivima rotora u stanju levitacije na oba AML odabiru *notch* filtri koji sprječavaju pobudu viših vlastitih formi vibriranja. Naposljetku se prema potrebi provodi precizno podešavanje svih parametara regulatora na oba AML. Stabilan odziv u stanju mirovanja (levitacije) se postigao uz slijedeća pojačanja PID regulatora:  $K_p = 80$ ,  $K_i = 20$  i  $K_d = 120$  na ležaju A te  $K_p = 55$ ,  $K_i = 20$  i  $K_d = 120$  na ležaju B te uz dva implementirana *notch* filtra ( $f_{\text{notchA1}} = 153$  Hz,  $f_{\text{notchA2}} = 272$  Hz) na ležaju A i jednog ( $f_{\text{notchB1}} = 272$  Hz) na ležaju B. Odabrane frekvencije su ovisno o ležaju do 12 Hz niže od pripadnih vlastitih frekvencija koje se nastoje stabilizirati *notch* filtrom. To znači da se stabilizacija nestabilnih elastičnih formi vibriranja provodi direktnim utjecajem na fazu što je poznatije pod nazivom fazna stabilizacija.

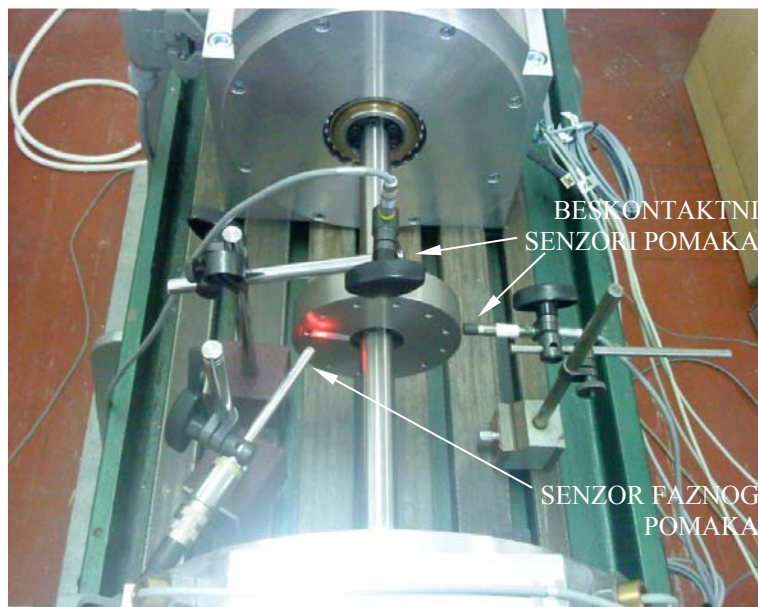
Posljednji korak u pripremi eksperimentalnog sustava se sastoji od uravnoteživanja masa koje je za potrebe ovog istraživanja provedeno u dvije ravnine (na dva vanjska dodatna diska). U tu je svrhu primijenjen uređaj za mjerenja u dinamici rotora koji u sebi sadrži integriranu rutinu za uravnoteživanje masa – *Vibroport 41* proizvođača Carl Schenk AG, Darmstadt, Njemačka u kombinaciji s dva beskontaktna senzora pomaka IN-085 te jednim optičkim senzorom faznog pomaka P-84 koji prikupljaju informacije o pomacima i faznom kutu rotora.

### 5.3. Eksperimentalna mjerenja

Uz induktivne senzore koji su ugrađeni u AML i koji osiguravaju mjerenja na položajima ležajeva, za sva mjerenja na dodatnim diskovima su korišteni prethodno spomenuti beskontaktni senzori pomaka IN-085 te optički senzor faznog pomaka P-84. Izmjereni signali se u ovom slučaju prikupljaju u uređaju za obradu signala *Dolch* povezanim sa PC računalom u koje je ugrađena PCI kartica NI 4472 proizvođača National Instruments s 8 analognih kanala. Prikupljeni podaci se snimaju pomoću posebno izrađene aplikacije u programskom paketu LabView. Iz razloga što se u signalu beskontaktnih senzora pomaka povremeno javljaju šumovi generirani od strane pogonskog sustava svaki priključeni senzor se elektromagnetski izolira od metalnog nosača senzora i na početku svakog mjerenja provjerava ispravnost njegovog rada pri brzini vrtnje rotora 5 Hz. Sve korištene LabView aplikacije su izrađene u sklopu doktorske disertacije [42].

Sva mjerenja vibracijskih pomaka prilikom pokretanja i zaustavljanja rotora uz prolazak prve kritične brzine su provedena na središnjem disku (disk 2) na kojem se očekuju najviše amplitude pomaka. Položaji pripadnih senzora tijekom mjerenja su prikazani na slici 5.5.

Obradom izmjerenih vibracijskih pomaka rotora u vremenskoj domeni dobiveni su rezultati mjerenja prikazani na slikama 5.6 – 5.21. Svi rezultati su nastali u uvjetima ubrzavanja rotora od 0 do 100 Hz s u 60 s (upuštanje rotora u pogon) ili usporavanja rotora od 100 Hz do 0 u 120 s (zaustavljanje rotora) uz prolazak prve kritične brzine. Za obradu rezultata korišteni su programski paketi LabView i Matlab.



**Slika 5.5.** Mjerenje vibracijskih pomaka na disku 2

Na slikama 5.6 – 5.9. su prikazani frekvencijski spektri izmjerenog signala s informacijama o načinu promjene pojedinih komponenata signala kao i lokaciji značajnijih frekvencija ili harmonika brzine vrtnje tijekom ubrzavanja i usporavanja rotora. Pri tome najizraženija spektralna linija odgovara prvom harmoniku brzine vrtnje. Na njoj je najistaknutije područje oko 70 Hz, što bi prema numeričkoj simulaciji odgovaralo prvoj elastičnoj formi vibriranja. Veći broj spektralnih linija je zapažen u horizontalnom smjeru mjerenja (slike 5.6 i 5.8) u kojem je rotor opterećen samo dinamičkim silama, za razliku od vertikalnog smjera (slike 5.7 i 5.9) u kojem dodatno djeluje težina rotora uzrokujući stabilnije ponašanje rotora u tom smjeru.

Za razliku od spektralnih mapa koje daju frekvencijski sadržaj izmjerenog signala, stvarne amplitude pomaka u svakom trenutku mjerenja se mogu prikazati u obliku dijagrama vibracijskih pomaka u vremenskoj domeni. Na slikama 5.10 i 5.11 su prikazani radijalni pomaci rotora u horizontalnom i vertikalnom smjeru mjerenja tijekom upućivanja rotora u pogon sa brzinom vrtnje čija je promjena u vremenu prikazana na slici 5.12. Pojava

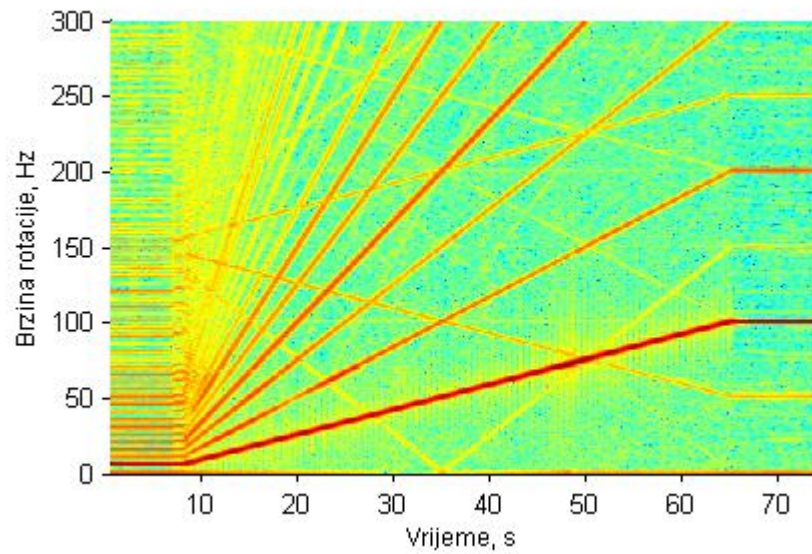
rezonancije se uočava u obliku maksimalnih amplituda na temelju kojih se očitava kritična brzina 71,5 Hz. Na slikama 5.13 i 5.14 su prikazani radijalni pomaci rotora u horizontalnom i vertikalnom smjeru mjerenja tijekom zaustavljanja rotora sa brzinom vrtnje čija je promjena u vremenu prikazana na slici 5.15. I u ovom slučaju pojava rezonancije se uočava u obliku maksimalnih amplituda pomaka koji se nalaze unutar nazivne zračnosti (0,3 mm). Slike 5.16 i 5.17 prikazuju pobudu uslijed prvog harmonika brzine vrtnje u horizontalnom i vertikalnom smjeru tijekom pokretanja rotora. Na slikama se uočava nagli porast amplitude i promjena u fazi pri 4300 okr/min što odgovara prvoj kritičnoj brzini 71,6 Hz. Zbog sporije promjene brzine vrtnje slabo je izražen utjecaj tranzijentnih vibracija te su ostvareni uvjeti bliski stacionarnom.

Usporedbom odgovarajućih vibracijskih pomaka rotora za horizontalni (slike 5.10 i 5.13) i vertikalni smjer mjerenja (slike 5.11 i 5.14) te amplituda prvog harmonika na slikama 5.16 i 5.17, odnosno 5.18 i 5.19 uočljiva je razlika u maksimalnim amplitudama, tj. pomaci u vertikalnom smjeru su veći u odnosu na horizontalni smjer. Ova se pojava javlja ukoliko statičke sile koje djeluju u horizontalnom i vertikalnom smjeru nisu jednake, kao u slučaju horizontalnih rotora te postaje jače izražena ukoliko ležaj radi s nižim statičkim strujama [54]. Takvo ponašanje rotora upućuje na ortotropnost sustava (različite krutosti u horizontalnom i vertikalnom smjeru) te se javlja čak i ako su geometrijske i električne karakteristike jednake u oba smjera. Sa slika je očito da veća krutost postoji u vertikalnom smjeru. Za dobivanje gotovo izotropnog ponašanja može se primijeniti PID metoda upravljanja, ali uz veće struje kompenzacije težine rotora. S druge strane, bolja regulacija ortotropnosti i smanjenje amplituda pomaka na kritičnim brzinama se može postići uz naprednije metode upravljanja. Iako mala, razlika se može uočiti i na slici 5.20 gdje su prikazane orbite rotora na nekoliko odabranih brzina vrtnje počevši od podkritičnog prema nadkritičnom području. Na nižim brzinama vrtnje orbite su neoblikovane zbog malih centrifugalnih sila u sustavu.

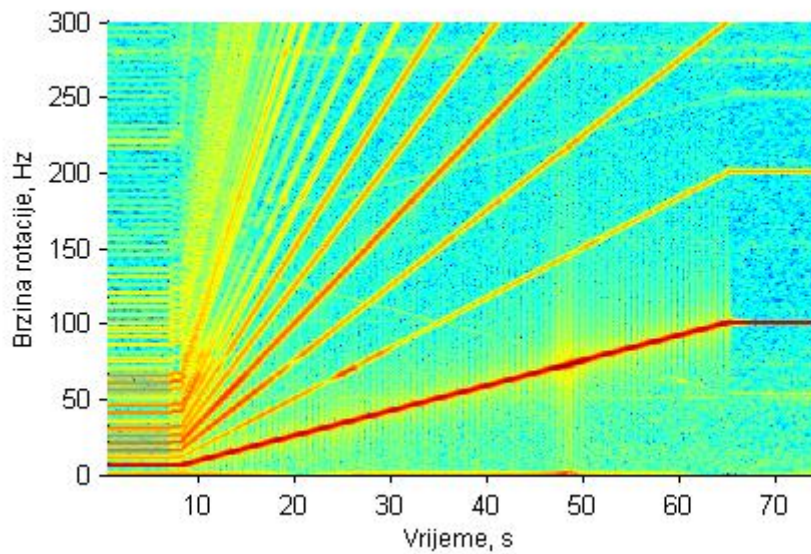
Izdizanje drugog harmonika, kao što je prikazano na slici 5.21 (na položaju maksimalne amplitude i promjene u fazi) može upućivati na nesavršenu poravnatost osi rotora i elektromotora. Ono se javlja pri brzini vrtnje 2125 okr/min (35,4 Hz) što je gotovo dvostruko niže u odnosu na frekvenciju prvog harmonika (71,6 Hz). S obzirom da njihovo odstupanje iznosi samo 0,8 Hz girokopski utjecaj se može zanemariti te stoga nije uzet u razmatranje u numeričkim simulacijama.

Eksperimentalno izmjerena prva kritična brzina pokazuje dobru podudarnost s predviđenom brzinom (72 Hz) iz numeričke simulacije (slika 4.24).

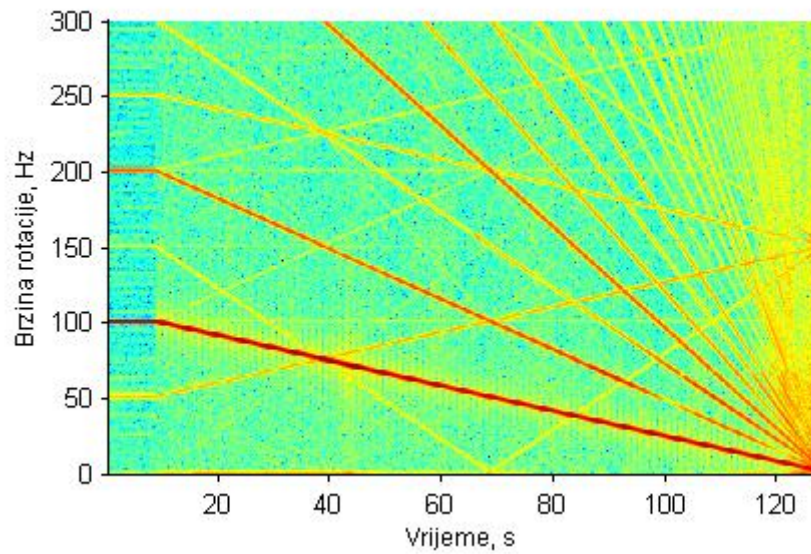




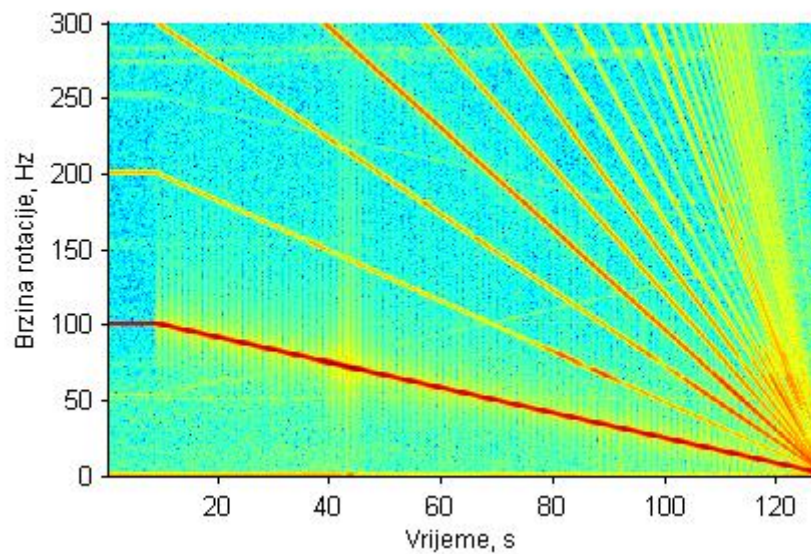
**Slika 5.6.** Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer mjerenja pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine



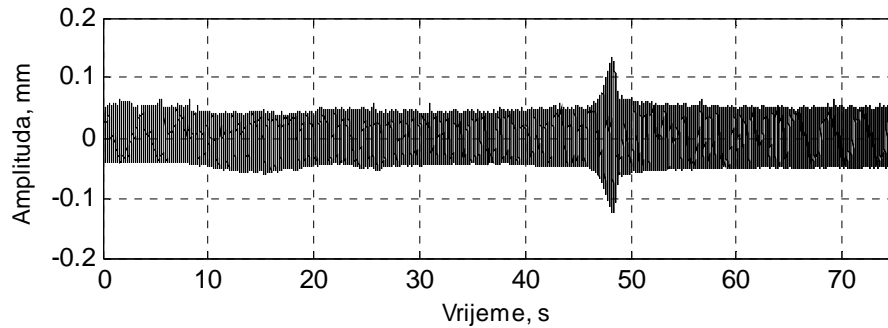
**Slika 5.7.** Spektralna mapa odziva rotora za vertikalni smjer mjerenja pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine



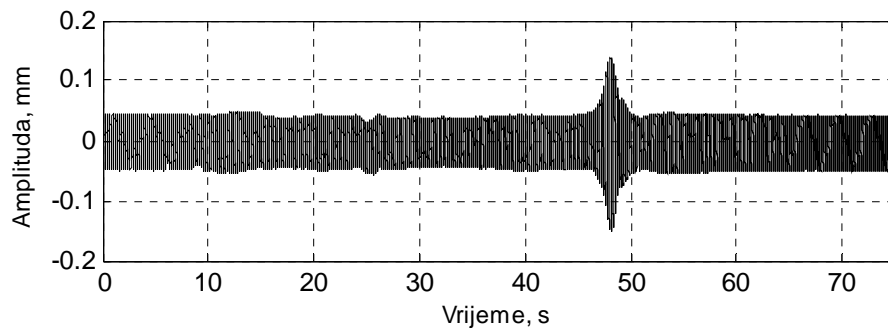
**Slika 5.8.** Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer mjerenja pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine



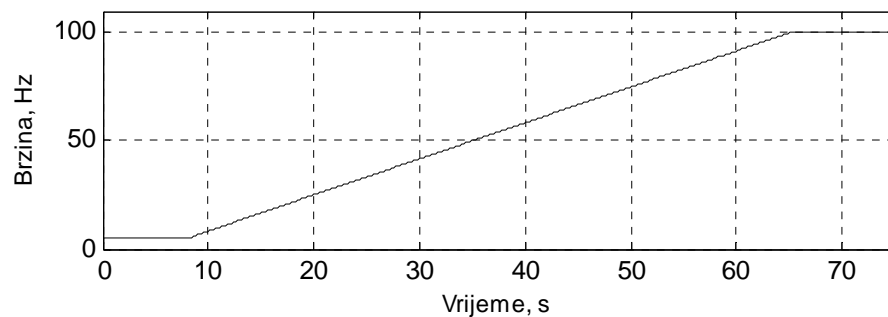
**Slika 5.9.** Spektralna mapa odziva rotora za vertikalni smjer mjerenja pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine



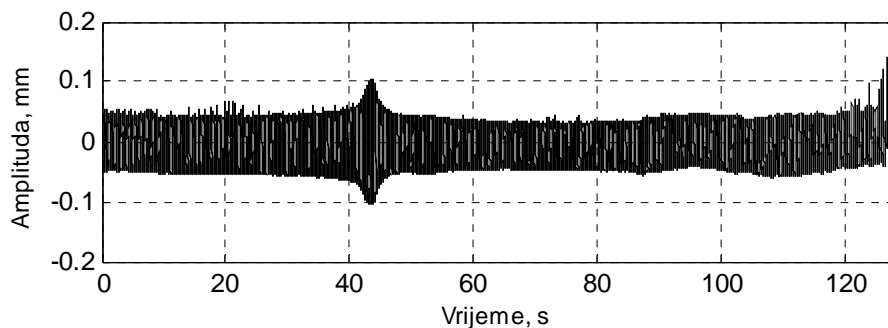
Slika 5.10. Radijalni pomaci rotora u horizontalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine



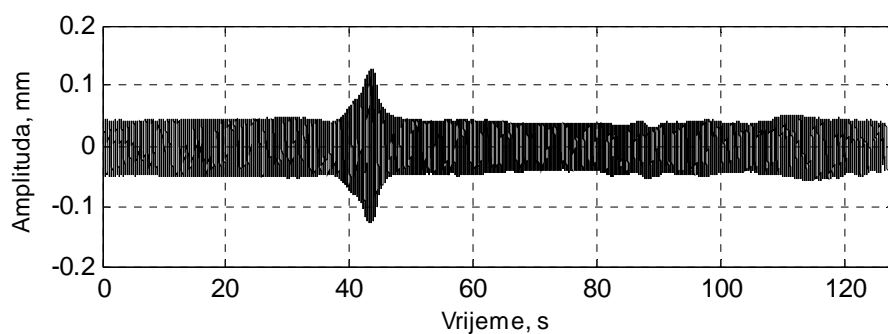
Slika 5.11. Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine



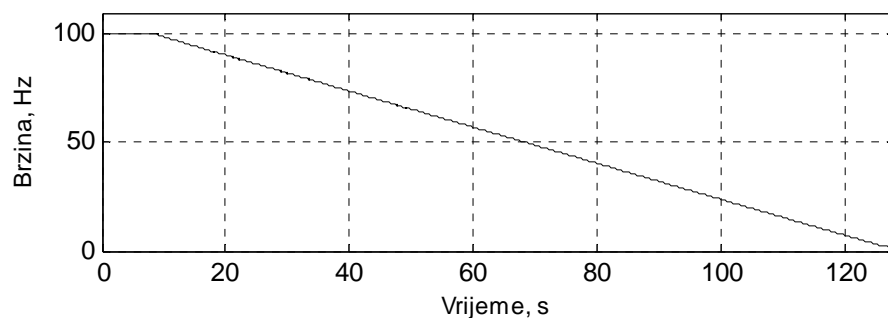
Slika 5.12. Promjena brzine vrtnje u vremenu pri ubrzavanju rotora od 0 do 100 Hz u 60 s



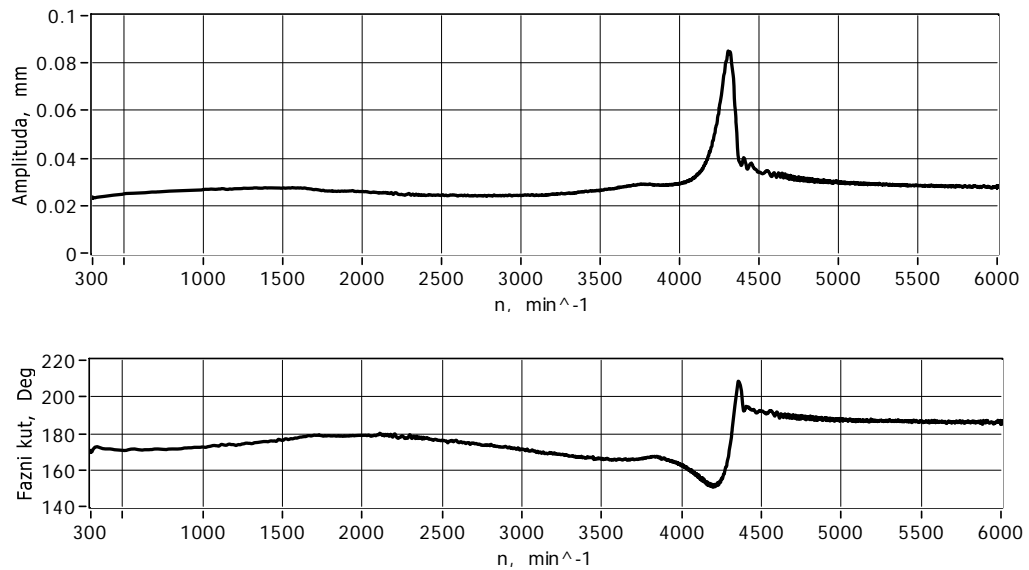
Slika 5.13. Radijalni pomaci rotora u horizontalnom smjeru pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine



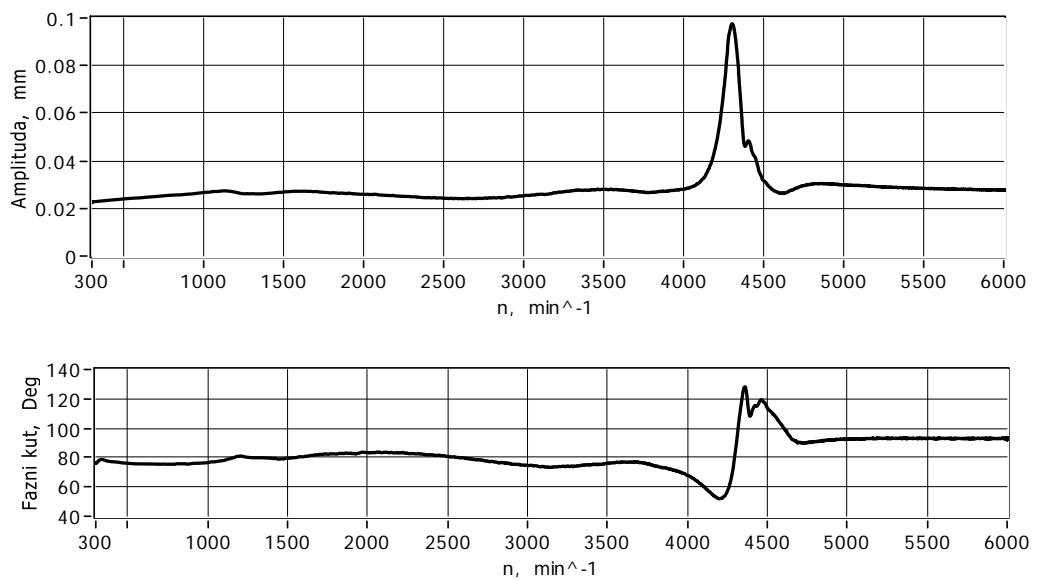
Slika 5.14. Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine



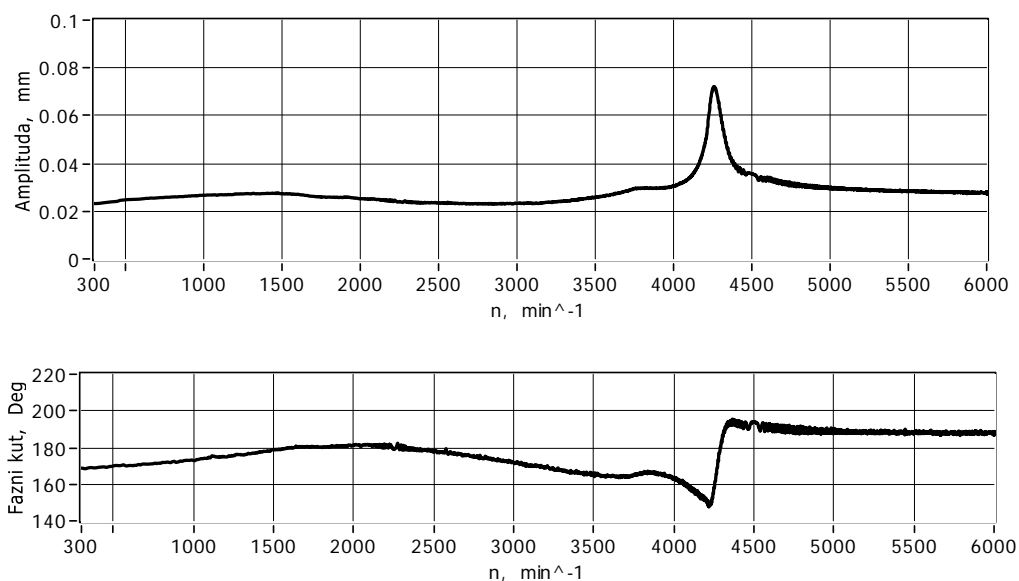
Slika 5.15. Promjena brzine vrtnje u vremenu pri usporavanju rotora od 100 do 0 Hz u 120 s



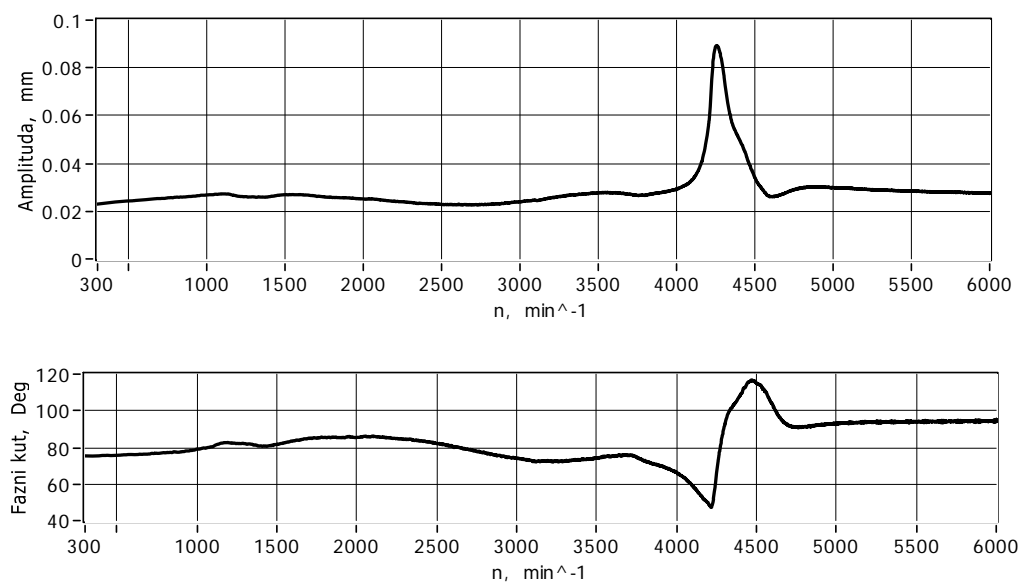
**Slika 5.16.** Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine



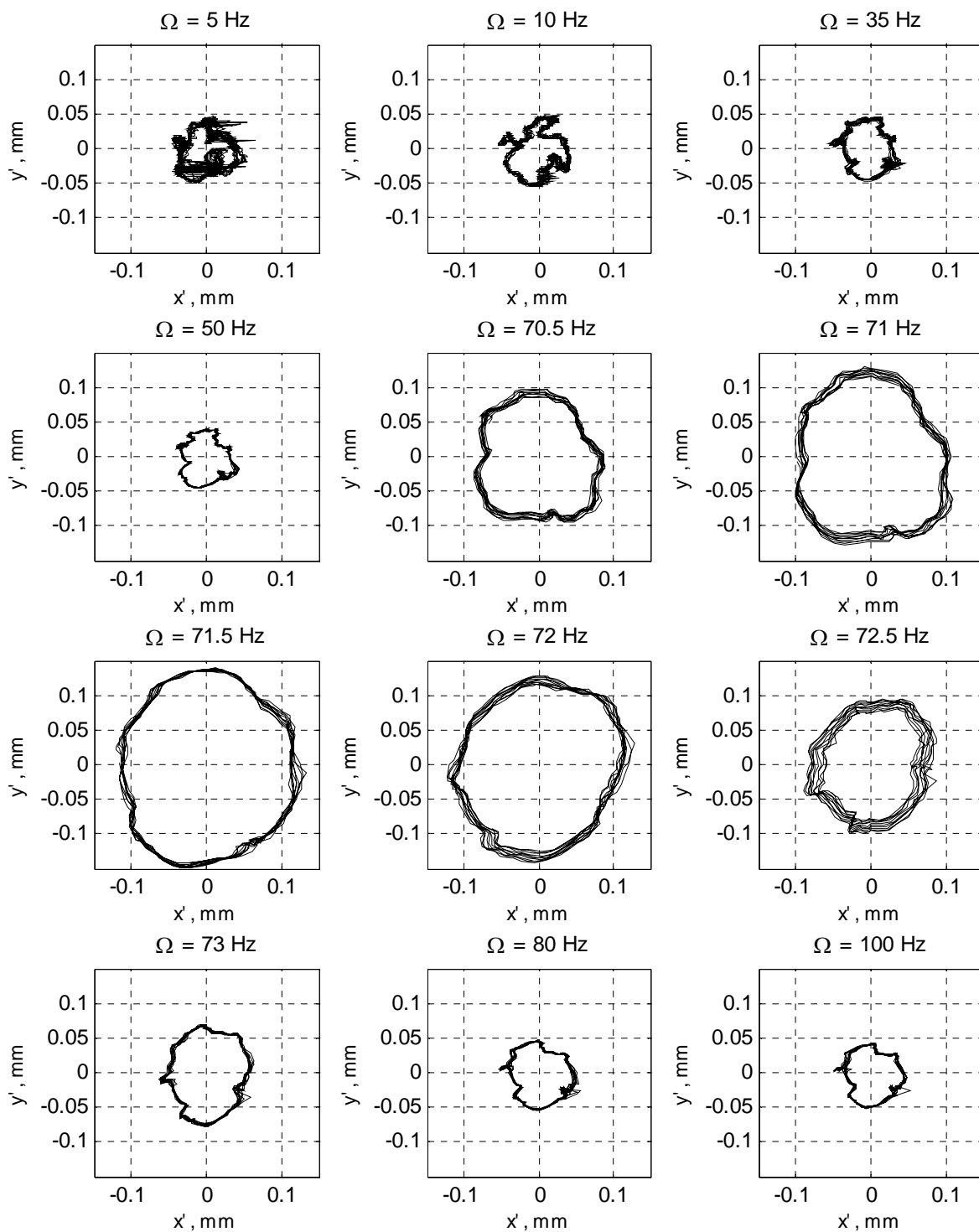
**Slika 5.17.** Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine



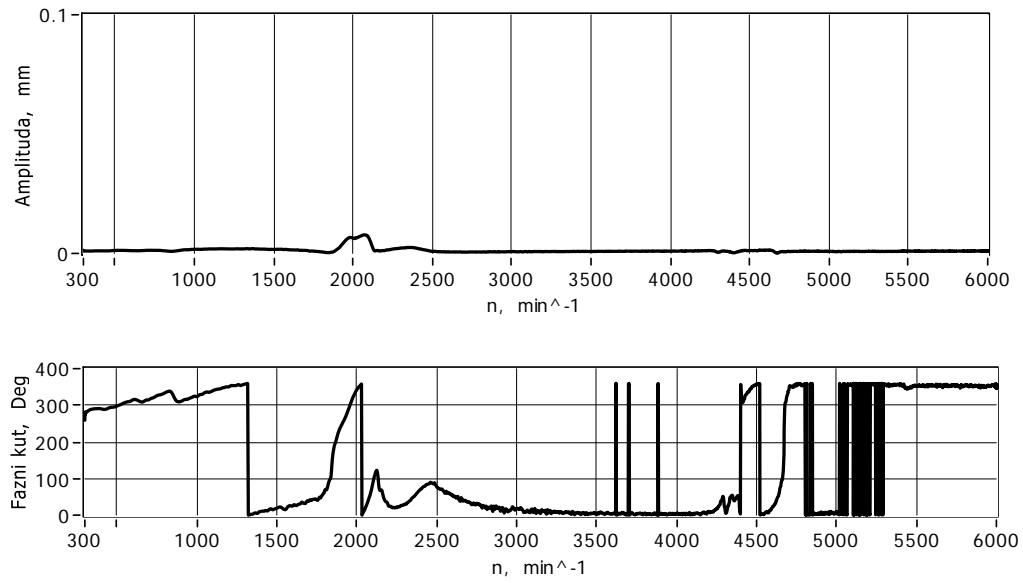
**Slika 5.18.** Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine



**Slika 5.19.** Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine



Slika 5.20. Izmjerene orbite rotora na položaju središnjeg diska pri odabranim brzinama vrtnje prilikom upućivanja rotora u pogon



**Slika 5.21.** Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine



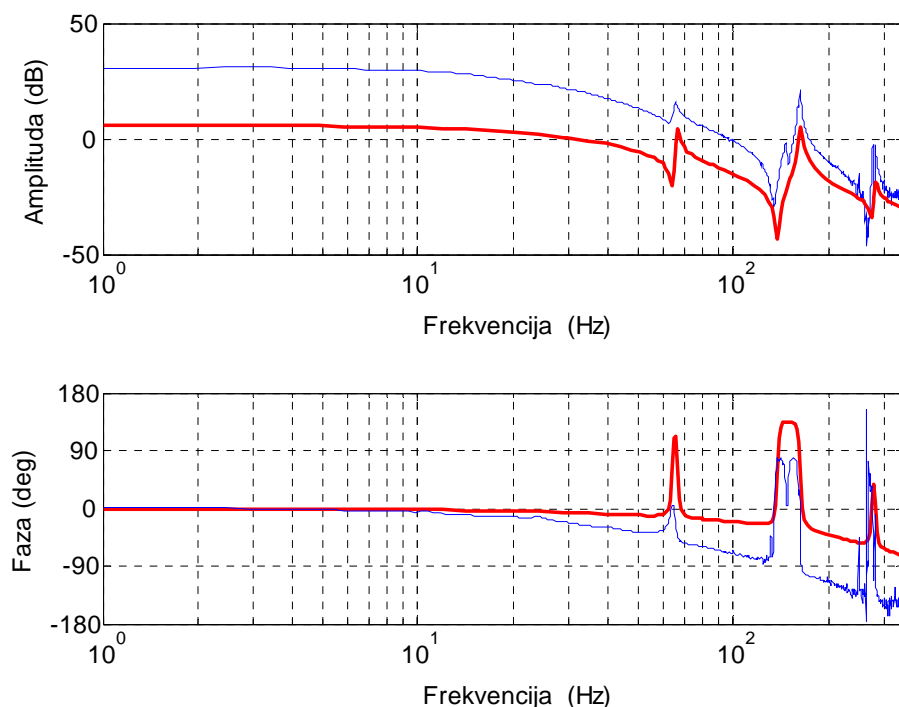
## Poglavlje 6.

# Upravljanje i robusna stabilizacija

U ovom je poglavlju provedeno PID upravljanje elastičnog rotora s AML čiji je konačni matematički model dobiven korigiranjem u skladu s rezultatima eksperimentalnih mjerenja. Uloga PID regulatora je dvostruka. Prvo, usporedba rezultata eksperimentalnih mjerenja s numeričkim rezultatima je zbog spomenutih ograničenja moguća samo za sustav s PID upravljačkim algoritmom. S druge strane, isti služi kao temelj za projektiranje naprednije Glover-MacFarlane  $H_\infty$  metode i poboljšavanje robusne stabilnosti.

### 6.1. Korigirani matematički model

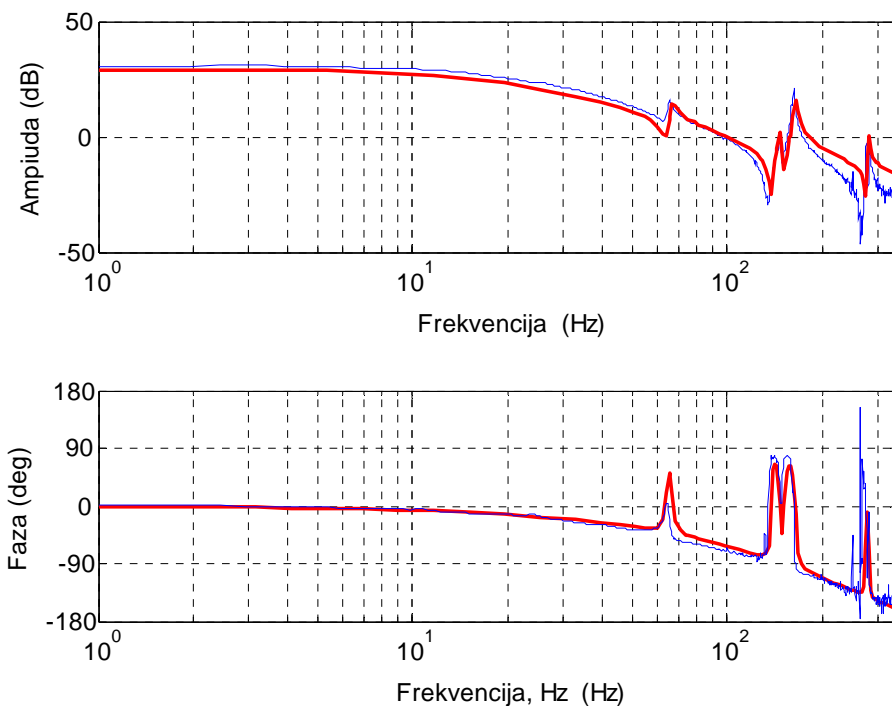
U skladu sa zapažanjima iznesenima u poglavlju 4.1.2, a s ciljem izrade teoretskog modela koji je dostatan za daljnja istraživanja, provedena je usporedba frekvencijskog odziva teoretskog modela s eksperimentalnim mjerenjima kao što je prikazano na slici 6.1 za jedan kanal mjerenja (AMB A,  $y$  smjer)  $4 \times 4$  MIMO sustava. Unatoč dobrom trendu odziva u cijelom frekvencijskom području, postoje i neka zamjetna odstupanja, kao što su fazna razlika na višim frekvencijama zbog vremenskih kašnjenja u raznim komponentama te razlika u amplitudnom dijagramu koja se može tumačiti pomoću koeficijenata AML  $k_s$  i  $k_i$ . S obzirom da su  $k_s$  i  $k_i$  inverzno proporcionalni kubu i kvadratu pomaka (2.4), respektivno, minimalna varijacija radne točke može rezultirati značajnim promjenama u njihovim veličinama i nezanemarivim greškama modeliranja. Na slici se može uočiti i utjecaj prve elastične forme temeljne ploče (147 Hz) koja u izvornom teoretskom modelu nije uzeta u obzir, a čije djelovanje također utječe na konačni frekvencijski odziv rotora.



**Slika 6.1.** Frekvencijski odzivi od ulaza u energetske pretvarač do izlaza iz položajnih senzora (za AMB A, y smjer): simulacija (crveno), eksperiment (plavo)

Osim toga, modalno prigušenje u teoretskom modelu je uzeto da iznosi 1% za sve forme. Međutim, sa frekvencijskih odziva se uočava da je ono izražajnije u slučaju prve forme te se smanjuje na drugoj i trećoj formi vibriranja. U skladu s time nova prigušenja forme se uzimaju redom kao modalna prigušenja 2%, 1% i 0,5%. Može se zaključiti da je ovaj način dovoljno pouzdan u procjenjivanju modalnog prigušenja uključenih forme vibriranja. U skladu s iznesenim zapažanjima provedena je korekcija teoretskog modela. Na slici 6.2 je prikazana usporedba izmjerenih i korigiranih rezultata za frekvencijski odziv sustava u otvorenom krugu za isti kanal mjerenja (AMB A, y smjer).

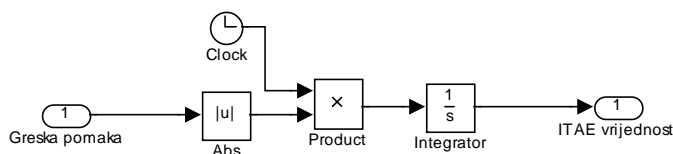
Pri tome se ukupno fazno kašnjenje zbog nemodelirane dinamike senzora i drugih elektroničkih komponenata, uključujući i vrijeme uzorkovanja digitalnog regulatora modelira kao ukupno vremensko kašnjenje od 1,3 ms primjenom Padeove aproksimacije 1. reda, a model temeljne ploče kao prijenosna funkcija 2. reda koji se dodatno uključuju u numerički model. Odstupanja u amplitudnom dijagramu su ispravljena modificiranjem početnih vrijednosti koeficijenata  $k_s$  i  $k_i$ . Dobiveni modeli se mogu smatrati relevantnima za daljnja istraživanja.



**Slika 6.2.** Frekvencijski odzivi od ulaza u energetski pretvarač do izlaza iz položajnih senzora (za AMB A, y smjer) nakon provedenih korekcija: simulacija (crveno), eksperiment (tamno plavo)

## 6.2. PID upravljanje

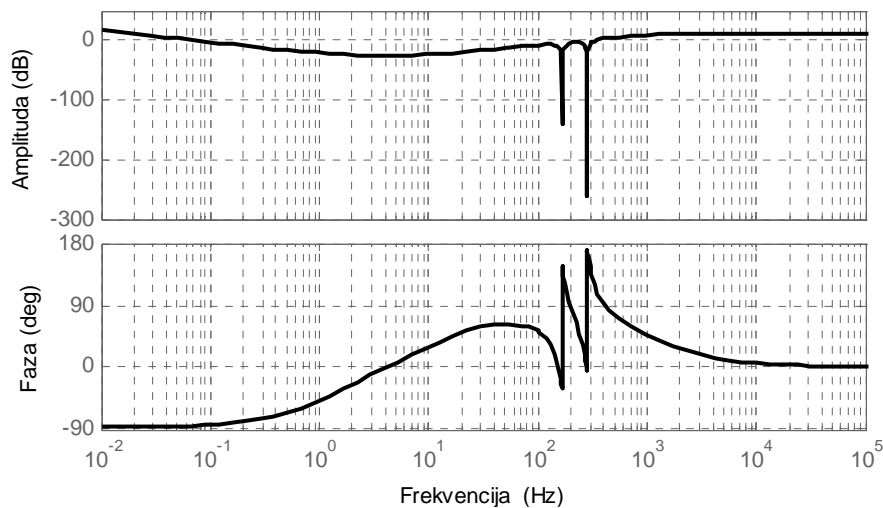
PID regulatori su primijenjeni za dovođenje rotora u stanje levitacije i rad u nadkritičnom području. Cilj je stabilizirati gibanja u obliku krutog tijela te prve tri elastične forme vibriranja. Odabrani su decentralizirani PID regulatori sa *notch* filtrima na svakoj od ukupno četiri upravljačke osi (vidi poglavlje 4.1.1). Parametri PID regulatora su podešeni primjenom *ITAE* integralnog kriterija, čiji je model u Simulinku prikazan na slici 6.3. S ciljem minimizacije danog kriterija primijenjena je Matlab funkcija *fmicon* kojom se minimizira veličina *ITAE* kriterija.



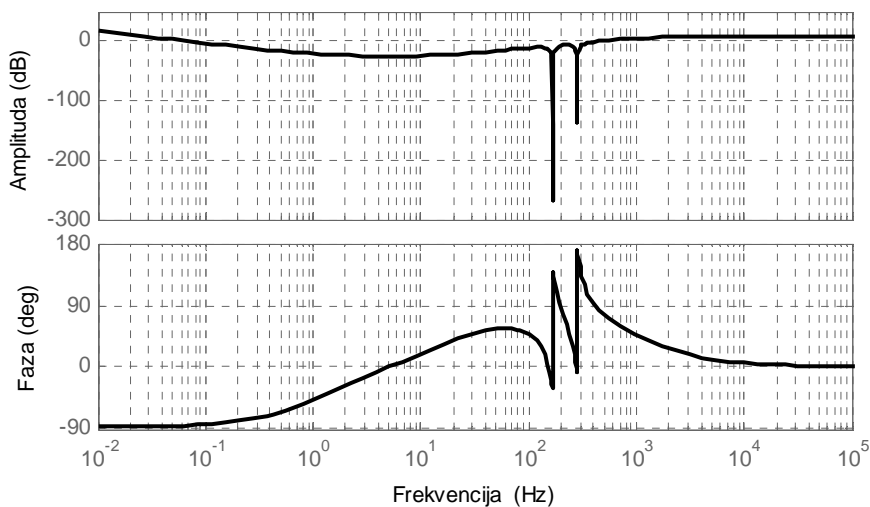
**Slika 6.3.** Simulacijski algoritam određivanja kvalitete *ITAE*

Tijekom podešavanja pojačanja pretpostavlja se da su na obje regulacijske osi jednog ležaja ista PID pojačanja čime se broj promjenljivih varijabli dvostruko smanjuje, a vrijeme optimizacije značajno skraćuje. Osim toga, kako se može smatrati da je u većini industrijskih

sustava interakcija jednog ulaznog kanala na sve izlazne regulacijske kanale (u slučaju promatranog sustava s AML ima ih četiri) koji se ne nalaze unutar promatrane upravljačke petlje veoma mala svaka se petlja može razmatrati odvojeno. To znači da se sustav može podešavati na način da se pretpostavi da jedna referenca utječe na samo jedan odgovarajući izlaz i svaka upravljačka petlja podešavati neovisno o drugoj. S druge strane, zbog neuzimanja u obzir giroskopskog utjecaja gibanje u jednoj ravnini ( $xz$ ) se može promatrati neovisno od gibanja u drugoj ravnini ( $yz$ ). To znači da se složeniji  $4 \times 4$  MIMO sustav može svesti na oblik  $2 \times 2$  MIMO za koji će se provesti projektiranje odgovarajućih regulatora. Elastične forme rotora su stabilizirane sa dva *notch* filtra čije frekvencije odgovaraju vlastitim frekvencijama elastičnih formi rotora, 165 Hz i 281 Hz i prigušenjem 0,15. Bodeovi dijagrami za ležaj A i ležaj B su prikazani redom na slikama 6.4 i 6.5. Oni su jednaki za obje osi regulacije jednog ležaja.



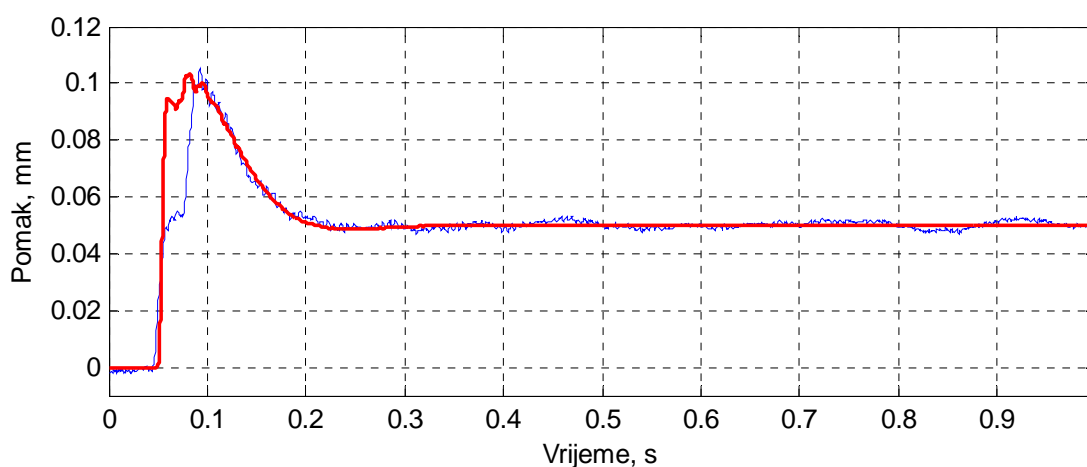
Slika 6.4. Bodeov dijagram PID regulatora s *notch* filtrima za ležaj A



Slika 6.5. Bodeov dijagram PID regulatora s *notch* filtrima za ležaj B

Krute forme vibriranja su stabilizirane s proporcionalnim i derivativnim pojačanjima regulatora, dok integracijski član povećava statičku krutost i na taj način uklanja grešku u ustaljenom stanju. Propadi u amplitudnom i frekvencijskom Bodeovom dijagramu odgovaraju frekvencijama *notch* filtara.

Usporedba simulacijskih i eksperimentalnih rezultata za levitirajući rotor u stanju mirovanja je prikazana na slici 6.6. Rezultati prikazuju vertikalne pomake diska 1 (disk na slobodnom prepustu) pri skokovitoj promjeni referentnog položaja od 0 do 0,0265 mm u smjeru obje regulacijske osi ležaja A. Mjerenja su povedena pomoću vanjskih beskontaktnih senzora pomaka.



**Slika 6.6.** Odstup u vertikalnom smjeru na disku 1: simulacija (crveno), eksperiment (plavo)

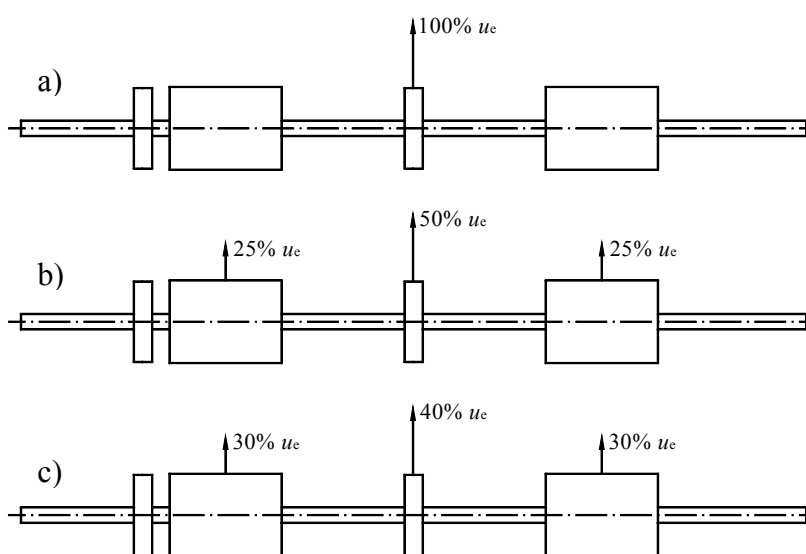
U slučajevima kada se kritična brzina rotora nalazi unutar radnog područja često se provode simulacijska testiranja njegove osjetljivosti na sile neuravnoteženja. Pritom se obično razmatra slijedeći slučaj [55]: masa neuravnoteženja  $u_e$  se smješta na disk koji je najbliži centru mase rotora čime se najjednostavnije može izraziti prva forma vibriranja.

Maksimalna dopuštena veličina zaostalog neuravnoteženja  $u_e$  koja se obično koristi u simulacijama se može odrediti prema standardu ISO 1940/1 [56] iz kojeg se za klasu stroja G 2.5 i maksimalnu radnu brzinu 6000 okr/min (100 Hz) rotora težine 24 kg može očitati:

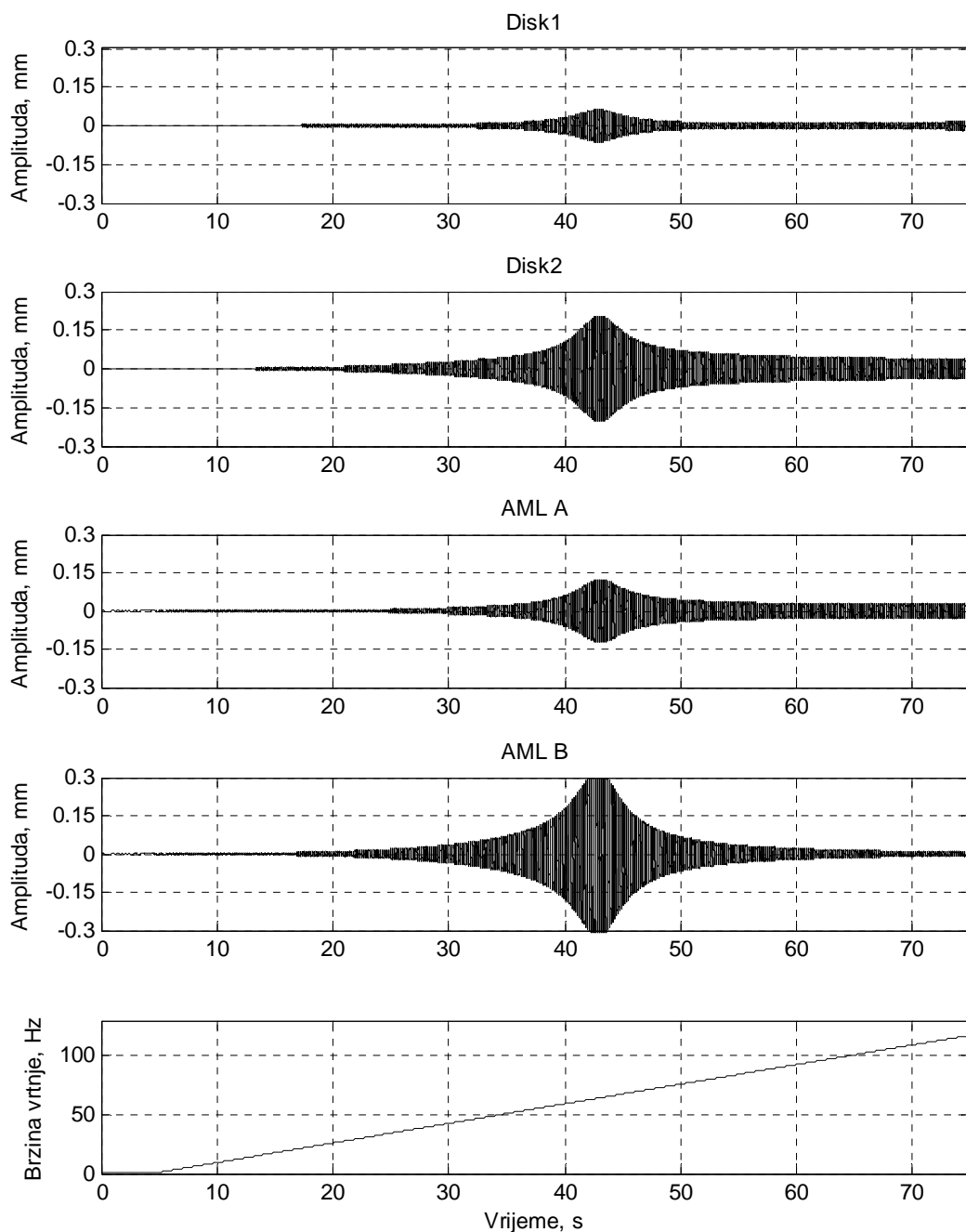
$$u_e = 4 \frac{\text{g} \cdot \text{mm}}{\text{kg}} \cdot 24 \text{ kg} = 96 \text{ g} \cdot \text{mm} \quad (6.2)$$

Međutim, kako su u promatranom slučaju mase rotorskih dijelova AML osjetno veće u odnosu na mase diskova nerealno je pretpostaviti da će sva masa neuravnoteženja biti smještena na disku 2. Iz tog su razloga ispitana tri slučaja (slika 6.7, a – c) s različitim

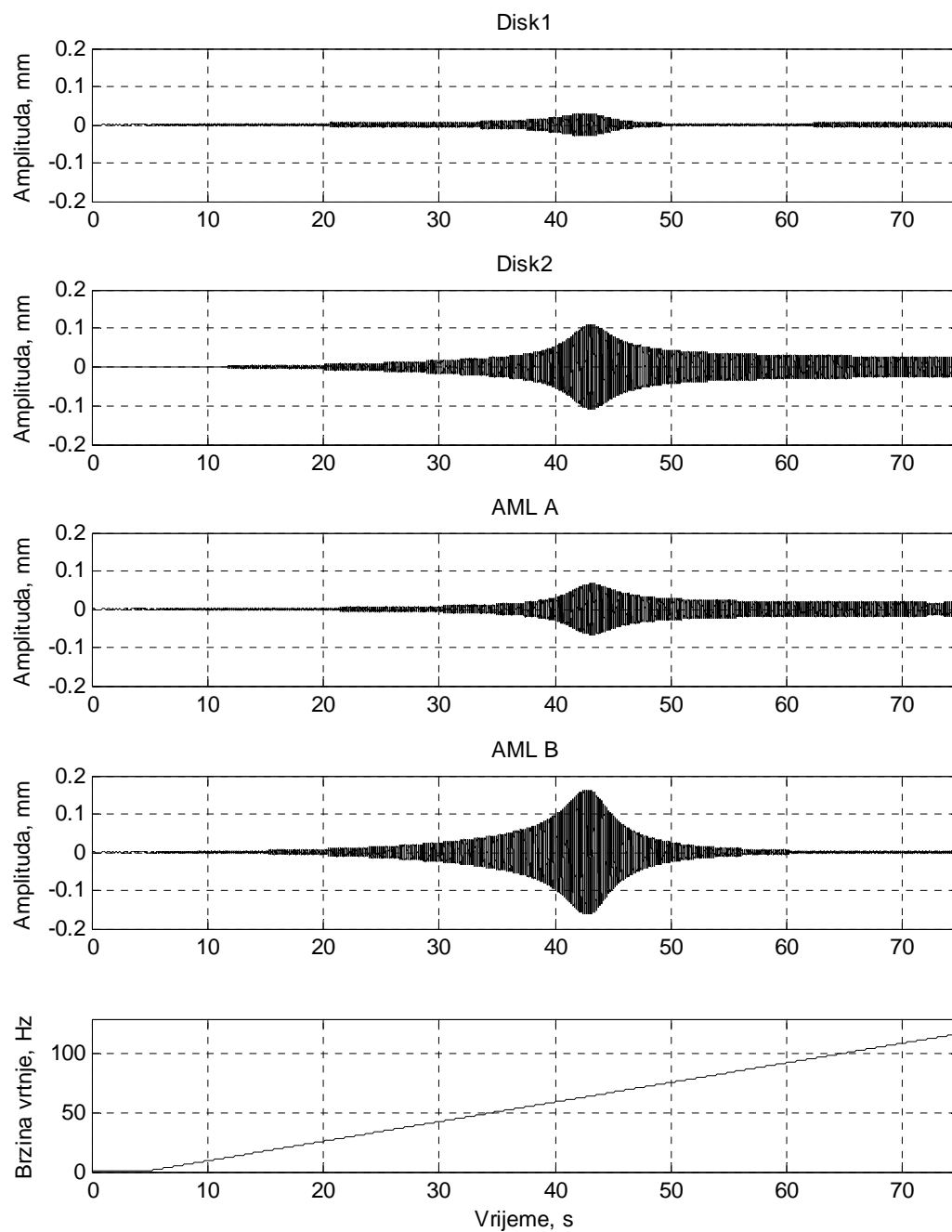
postotnom raspodjelom ukupnog pretpostavljenog zaostalog neuravnoteženja (6.2). Pripadni radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru tijekom ubrzavanja rotora sa  $10,47 \text{ rad/s}^2$  su dani redom na slikama 6.8 do 6.10 za oba diska i oba AML. Usporedbom vertikalnih pomaka za disk 2 s eksperimentalno dobivenim pomacima u istim uvjetima (slika 5.10) uočava se njihova dobra podudarnost u rezonantnom području, naročito u slučaju 6.7 b). Odstupanja pomaka u području izvan rezonancije nastaju uslijed iskrivljenosti osovine koja se na eksperimentalnim rezultatima izražava u obliku većih pomaka izmjerenih položajnim sensorima [57]. S obzirom da ova pojava dolazi do izražaja samo u području izvan rezonancije gdje se ne može ispraviti balansiranjem, iskrivljenost osovine u simulaciji nije niti uzeta u obzir.



**Slika 6.7.** Raspodjela zaostalog neuravnoteženja u postocima po promatranim masama

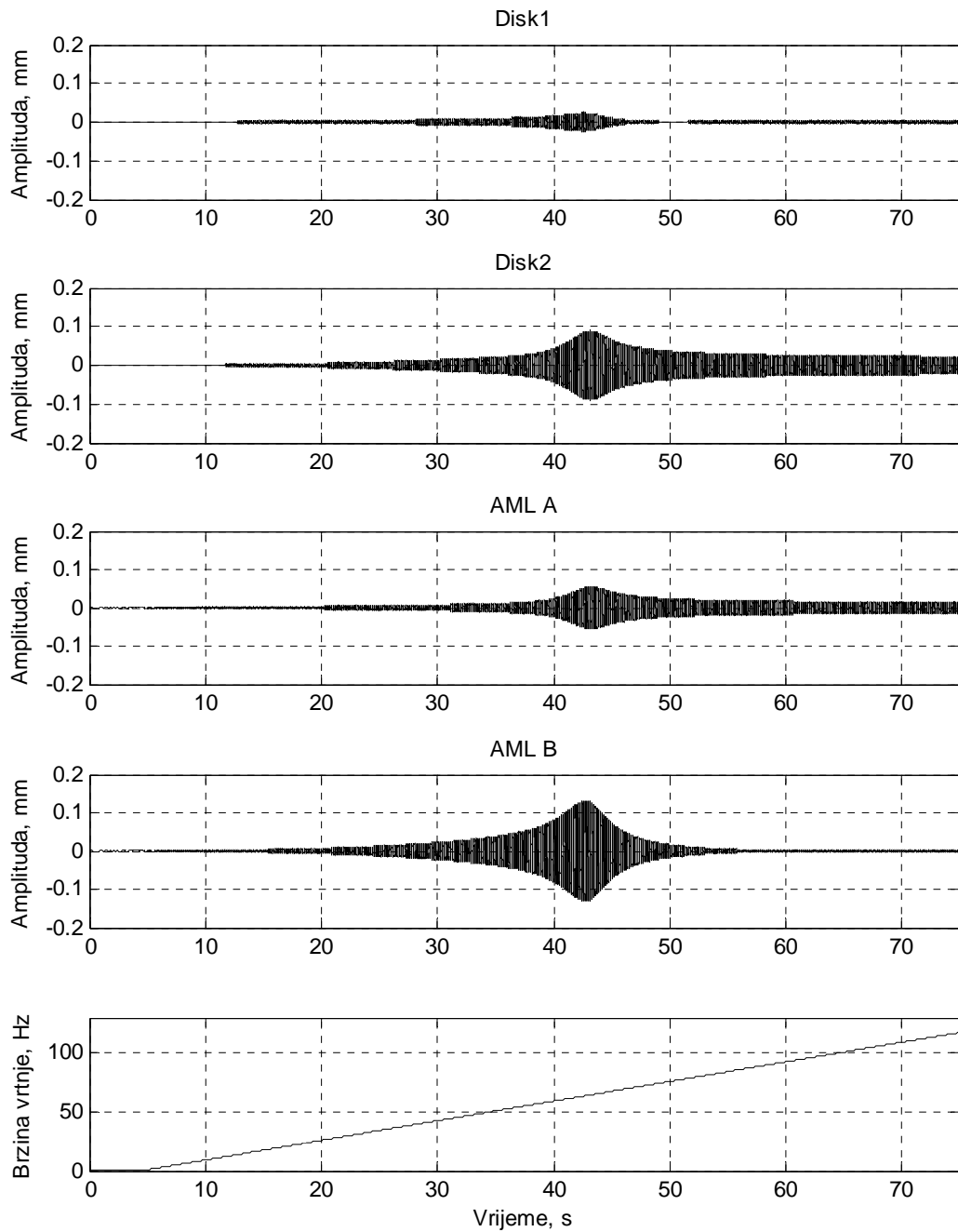


**Slika 6.8.** Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru pri ubrzanju  $10,47 \text{ rad/s}^2$  (uz neuravnoteženosti definirane na slici 6.7 a)



**Slika 6.9.** Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru pri ubrzanju  $10,47 \text{ rad/s}^2$  (uz neuravnoteženosti definirane na slici 6.7 b)





**Slika 6.10.** Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru pri ubrzanju  $10,47 \text{ rad/s}^2$  (uz neuravnoteženosti definirane na slici 6.7 c)

### 6.3. Robusna stabilizacija

S ciljem poboljšanja robusnosti sustava s PID upravljačkim algoritmom primijenjena je robusna Glover-MacFarlane  $H_\infty$  metoda, čije su postavke dane u poglavlju 3.5.2. Postupak je proveden s ciljem poboljšanja funkcije osjetljivosti sustava te čini poveznicu između decentraliziranog i centraliziranog upravljanja. U prvom koraku proces u otvorenom krugu  $G(s)$  (umnožak svih matričnih prijenosnih funkcija koje čine sustav koji se modelira, uključujući energetski pretvarač i senzor) se prevodi u oblik lijeve *coprime* faktorizacije (3.34) i nakon toga proširuje s predkompenzatorom  $\mathbf{W}_1$  na način da oblikovani model glasi:

$$\mathbf{G}_s = \mathbf{G}\mathbf{W}_1 \quad (6.3)$$

U mnogim praktičnim sustavima, uključujući rotore s AML, procesi su nestabilni i posjeduju višestruke amplitudne prijelazne frekvencije<sup>9</sup>. U tim slučajevima, prema standardnom Glover-McFarlane postupku odabir prijenosnih funkcija za oblikovanje procesa u otvorenoj petlji postaje veoma otežan. Međutim, poznato je da se predkompenzator obično odabire kao niskopropusni filter, a prema potrebi može uključivati i *notch* filtre koji su posebno učinkoviti prilikom uklanjanja elastičnih formi. U ovom je radu predloženo da se  $\mathbf{W}_1$  odabere u obliku prijenosne funkcije prethodno podešenog PID regulatora i prikladno odabranih *notch* filtara s kojima se postižu nominalne karakteristike sustava u zatvorenoj petlji. Pri tome, npr. u slučaju  $4 \times 4$  MIMO sustava matrica  $\mathbf{W}_1$  glasi

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} G_{\text{PIDr1}}G_{\text{notch1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{\text{PIDr2}}G_{\text{notch2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\text{PIDr3}}G_{\text{notch3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\text{PIDr14}}G_{\text{notch4}} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

gdje su  $G_{\text{PIDri}}$  i  $G_{\text{notchi}}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , prijenosne funkcije PID regulatora i *notch* filtara za odgovarajuće regulacijske izlaze sustava definirane izrazima (3.8) i (3.9), respektivno i koje su u ovom radu odabrane u prethodnom poglavlju. S obzirom da su u AML sustavima svi izlazi ekvivalentni, tj. nema relativnih razlika između važnosti izlaza koji se reguliraju,  $\mathbf{W}_2$  je odabran kao jedinična dijagonalna matrica:

---

<sup>9</sup> Amplitudna prijelazna frekvencija (engl. *gain crossover frequency*) je frekvencija kojoj odgovara jedinično amplitudno pojačanje (0 dB)

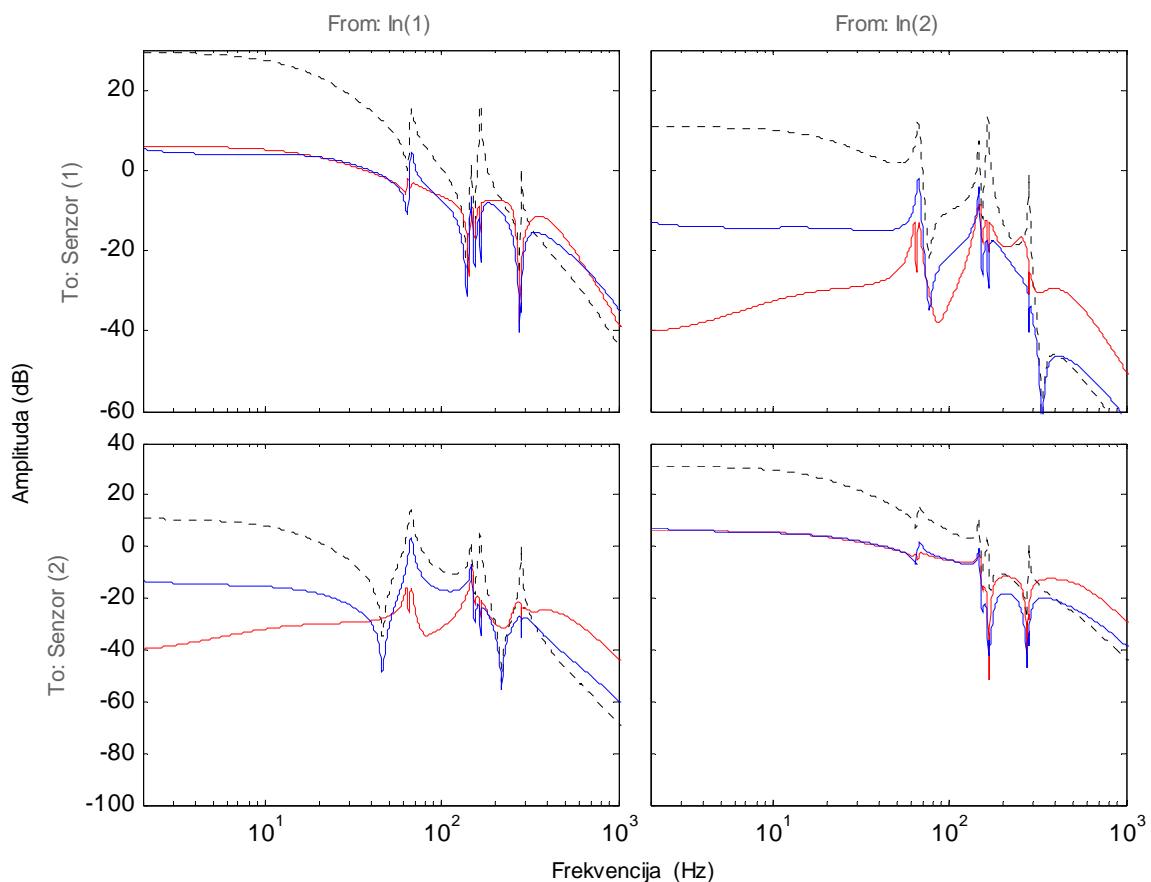
$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{I}_{4 \times 4}. \quad (3.42)$$

U slijedećem se koraku rezultirajući oblikovani proces  $\mathbf{G}_s$  robusno stabilizira s obzirom na nesigurnosti *coprime* faktora primjenom  $H_\infty$  optimizacije opisane u poglavlju 3.5.2.1 i određuje pripadni regulator  $\mathbf{K}_s$ . Važna prednost metode se sastoji u tome što se u ovom koraku ne traži eksplicitno definiranje nesigurnosti ili odabir težinskih funkcija. Naposljetku, traženi regulator  $\mathbf{K}$  za model  $\mathbf{G}$  glasi:

$$\mathbf{K} = \mathbf{W}_1 \mathbf{K}_s. \quad (3.40)$$

Opisana je procedura implementirana u programskom paketu Matlab. Ovaj postupak odabira predkompensatora je primijenjen u mnogim radovima [29], [30], [52], ali prema saznanjima autora isti još nije do sada objavljen u radovima koji istražuju elastične rotore s AML.

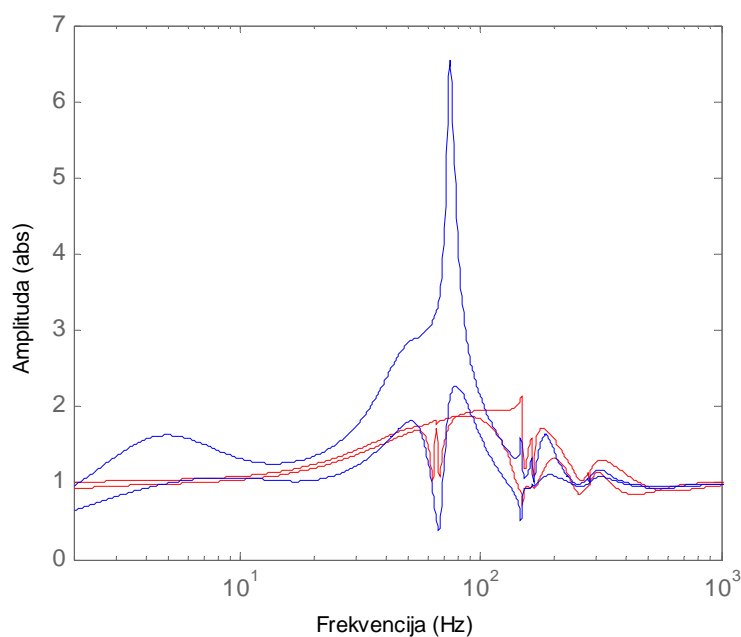
Odziv sustava rotor/AML u otvorenom krugu s i bez regulatora je prikazan na slici 6.11.



**Slika 6.11.** Bodeovi dijagrami prijenosnih funkcija sustava u otvorenom krugu: sustav bez regulatora (–), odziv uz PID regulator (plavo), odziv uz robusni regulator (crveno)

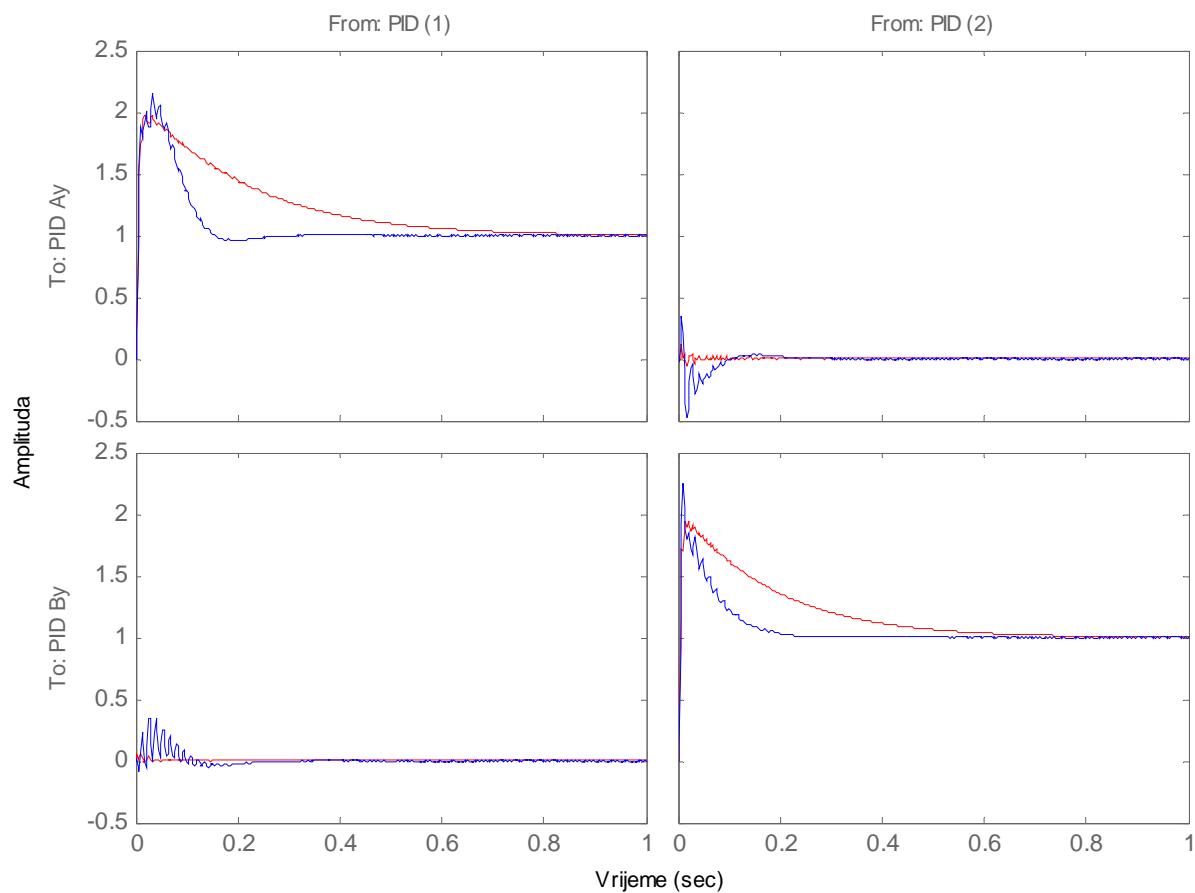
Učinkovitost prigušenja rezonantnih izdizanja je značajno poboljšana u slučaju odziva sa  $H_\infty$  regulatorom u odnosu na početni PID regulator. To naročito dolazi do izražaja kod prve elastične forme vibriranja što bi omogućilo stabilniji prelazak kroz prvu kritičnu brzinu, a što je i cilj ovog rada.

Na slici 6.12 je dana usporedba izlazne osjetljivosti i sustava uz PID regulator odabran prethodnom poglavlju i robusni regulator. Vršna vrijednost osjetljivosti iznosi 6,5. Ona je 1,93 puta veća nego što dopušta ISO standard za magnetske ležajeve [58], tj. rješenje bi se smatralo preosjetljivo za komercijalne primjene. S druge strane, osjetljivost u slučaju  $H_\infty$  regulatora je niža od 3 što zadovoljava dani ISO standard. Može se uočiti da se najviša vršna osjetljivost u početnom sustavu (uz PID regulator) javlja na prvoj elastičnoj formi rotora. U drugom slučaju (uz  $H_\infty$  regulator) ne pojavljuje se izdizanje na položaju prve elastične forme, tj. sustav je mnogo manje osjetljiv na vanjske poremećaje.



**Slika 6.12.** Usporedba izlazne osjetljivosti sustava uz PID regulator (plavo) i robusni regulator (crveno)

Dinamičko ponašanje  $2 \times 2$  MIMO sustava u zatvorenom krugu pri jediničnoj skokovitoj pobudi je prikazano na slici 6.13.  $H_\infty$  regulator djeluje povoljno na smanjenje nadvišenja i oscilacija položaja rotora u direktnoj grani sustava (pobuda i mjerenje na istom ležaju). Najznačajnije poboljšanje odziva se očitava na smanjenju amplituda rotora u spregnutom gibanju (pobuda i mjerenje na različitim ležajevima).



**Slika 6.13.** Odziv sustava na jediničnu skokovitu pobudu uz PID regulator (plavo) i robusni regulator (crveno)



## **Poglavlje 7.**

# **Zaključak**

Osnovni zahtjevi koji se postavljaju vezano uz rad rotacijskih strojeva su postizanje robusnog, stabilnog i pouzdanog pridržavanja rotora u cijelom području radnih brzina. Ukoliko se radna brzina rotora nalazi u podkritičnom području njegova se učinkovita stabilizacija može postići sa PID regulatorima. U takvim se slučajevima kao osnova za modeliranje rotora može primijeniti model koncentrirane mase ili krutog tijela. S druge strane, ukoliko rotor radi u nadkritičnom području, tj. na brzinama vrtnje koje su više od prve kritične brzine rotora potrebno je primijeniti složenije upravljačke algoritme. Pri tome se na poseban način moraju razmotriti i uzeti u obzir elastične forme rotorskog sustava, tj. vlastite frekvencije pri kojima dolazi do pojave kritičnih brzina. Stoga, numerički model rotora mora sadržavati strukturni model rotora koji će na primjeren način obuhvatiti vlastite frekvencije rotora koje se nalaze unutar frekvencijskog raspona sustava.

U ovom je radu naglasak dan na analizu ponašanja elastičnog rotora s nekolokacijom, oslonjenog na dva radijalna AML te pronalaska odgovora na probleme koji se neizbježno javljaju u tom području. Izrađen je numerički model u programskom paketu Matlab/ Simulink na temelju kojeg se može dobiti uvid u ponašanje rotorskih sustava s AML te provesti projektiranje i implementacija odabrane metode upravljanja uz koju se postiže stabilan rad rotora iznad njegove prve kritične brzine. Modeliranje sustava se može podijeliti na dva osnovna dijela od kojih se prvi izvodi u programskom okružju Matlab te služi za detaljnu obradu i pripremu svih ulaznih podataka, uključujući izradu modela elastičnog rotora te modela pripadnih elektroničkih komponenata (senzora, energetske pretvarača i aktuatora), a drugi u programskom okružju Simulink gdje se na sistematičan način vrši povezivanje svih elemenata u zatvoreni krug sustava. Strukturni model rotora je izrađen MKE metodom sa Euler-Bernoulli grednim elementima. Primjenom metode modalne dekompozicije i

uklanjanjem viših elastičnih formi vibriranja koje imaju zanemariv utjecaj na ponašanje sustava isti je preveden u model u prostoru stanja koji je prikladniji za daljnju dinamičku analizu. Na taj se način omogućuje definiranje svih ulaznih (sila aktuatora, vanjske sile) i izlaznih (izmjereni pomak) signala sustava uz modeliranje sustava s kolokacijom i nekolokacijom. Senzori i energetski pretvarači su modelirani odgovarajućim prijenosnim funkcijama koje opisuju njihovu dinamiku. Nakon što su uključeni modeli svih sastavnih komponenata AML sustava, kao tipičnog mehatroničkog sustava, i prikladno projektirani regulatori (PID regulator ili robusni  $H_\infty$  regulator) dobiven je učinkovit alat za modeliranje i upravljanje dinamike elastičnog rotora s AML. Izrađeni programski alat omogućuje aktivno upravljanje dinamikom elastičnog rotora u uvjetima različitih pobudnih mehanizama poput skokovite pobude, sila neuravnoteženja masa i težine. Opisanim pristupom moguće je analizirati i praktične sustave različitih konfiguracija.

U radu su osim numeričkih simulacija provedena i eksperimentalna ispitivanja. Kombinacijom ovih dvaju pristupa uočeno je da sustav ima problema s nekolokacijom i to već na prvoj elastičnoj formi vibriranja. S ciljem rješavanja problema nekolokacije u smislu postizanja stabilnog rada u nadkritičnom području numerički je analizirano više različitih konfiguracija sustava rotor/AML te odabrana najpovoljnija. Na taj način se ciljanim mehaničkim izbjegavanjem modalnih čvorova između odgovarajućih parova senzor/aktuator razmatranog ležaja osiguravaju povoljniji uvjeti za primjenu PID metode upravljanja koja je još uvijek jedna od najčešće primjenjivih metoda upravljanja u industriji i u takvim uvjetima osigurava stabilan prolazak prve kritične brzine.

Na osnovu odabrane konfiguracije sastavljen je ispitni stol koji se sastoji od dva radijalna aktivna magnetska ležaja, elastične osovine s dva dodatna diska, elastične spojke te elektromotora. U sljedećem koraku je provedeno uravnoteživanje masa u dvije ravnine na vanjskim (dostupnim) diskovima.

Na temelju inicijalnih eksperimentalnih mjerenja identificirana je korelacija između eksperimentalnih i simulacijskih rezultata u obliku Bodeovih dijagrama te provedene potrebne korekcije numeričkog modela. Takvi su koraci potrebni iz razloga što je posve točan numerički model gotovo nemoguće postići zbog brojnih efekata koji su prisutni u sustavu a koje je otežano modelirati ili nisu u potpunosti poznati (krutosti laminiranih dijelova rotora, utjecaji temelja, točna prigušenja pojedinih formi vibriranja, vremenska kašnjenja zbog digitalnog uzorkovanja ili fizikalnog kašnjenja u elektroničkim komponentama i sl.). Za korigirani numerički model s odabranom konfiguracijom sustava projektiran je PID regulator s *notch* filtrima. Podešavanje pojačanja regulatora je provedeno primjenom *ITAE* integralnog kriterija, dok su frekvencije *notch* filtara odabrane na višim vlastitim frekvencijama rotora.



Analizom funkcije osjetljivosti takvog sustava uočene su visoke vršne amplitude koje s aspekta komercijalne primjene ne zadovoljavaju ISO standard. To je bio poticaj za numeričko proširenje postojeće metode upravljanja s naprednijom  $H_\infty$  metodom projektiranom prema Glover-McFarlane metodi. Za oblikovanje modela sustava primijenjena je funkcija predkompensatora koju čini prethodno projektirani PID regulator s *notch* filtrima. Povećanje robusnosti sustava, tj. smanjenje vršne amplitude funkcije osjetljivosti zatvorenog sustava s novim regulatorom pokazatelj je uspješnosti predložene metode na promatranom primjeru. Prema postojećim saznanjima, ovaj postupak odabira predkompensatora nije do sada objavljen u radovima koji istražuju elastične rotore s AML te se može smatrati proširenjem postojećih znanstvenih spoznaja u promatranom području.

Numerički dobivena pojačanja PID regulatora su prenesena na eksperimentalni sustav. U takvim uvjetima su provedena brojna mjerenja kao što su frekvencijski odzivi sustava u otvorenom krugu, odzivi na skokovitu pobudu u stanju mirovanja (levitacije) te analize pokretanja i zaustavljanja rotora uz prolazak kritične brzine. Mjerenja su provedena na dodatnim diskovima pomoću prikladno postavljenih i kalibriranih vanjskih beskontaktnih senzora pomaka i optičkog senzora faznog pomaka. Svi rezultati mjerenja su analizirani i prikazani grafički u računalnim programima LabView i Matlab. Usporedbom simulacijskih i eksperimentalnih rezultata, kako u stanju mirovanja tako i prilikom prolaska kroz prvu kritičnu brzinu uočena je njihova veoma dobra podudarnost. Zbog ograničenosti sustava upravljanja eksperimentalna je verifikacija provedena samo za slučaj PID metode upravljanja.

Znanstveni značaj i doprinos ovog rada očituje se u sustavnom postupku rješavanja problematike elastičnih rotora oslonjenih pomoću radijalnih AML i to u smislu rješavanja problema nekolokacije sustava. U radu je predloženo rješavanje spomenutog problema nekolokacije primjenom ciljanog mehaničkog izbjegavanja modalnog čvora između parova senzor/aktuator razmatranog ležaja čime se osiguravaju povoljniji uvjeti za primjenu PID metode upravljanja i u tim uvjetima osigurava stabilan prolazak prve kritične brzine. Navedenim postupkom uz uporabu numeričke modalne analize, odabire se povoljna mehanička konfiguraciju sustava elastični rotor/AML. Verifikacija odabrane mehaničke konfiguracije sustava izvršena je numeričkim i eksperimentalnim testiranjima u uvjetima spomenutih pobudnih mehanizama.

Kao smjernica za buduća istraživanja predlaže se proširenje postojećeg eksperimentalnog ispitnog stola s AML na način da se omogući implementacija naprednijih metoda upravljanja pomoću centraliziranog sustava upravljanja. Na taj bi se način dobio dublji uvid u istraživanje dinamike elastičnih rotora s AML i bolje mogućnosti verifikacije simulacijskih i eksperimentalnih rezultata.



## Popis literature

- [1] Earnshaw, S., *On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol.7 (1842), pp. 97 – 112.
- [2] Bassani, R., *Earnshaw (1805–1888) and Passive Magnetic Levitation*, *Mechanica*, Springer, Vol.41 (2006), pp. 375 – 389.
- [3] Habermann, H., Liard, G., *Practical Magnetic Bearings*, *IEEE Spectrum*, Vol. 16 (1979)
- [4] W. Braunbeck, *Free suspension of bodies in electric and magnetic fields*, *Zeitschrift für Physik*, Vol. 112 (1939), No. 11, pp. 753 – 763.
- [5] Schweitzer, et al., *Magnetic Bearings: Theory, Design and Application to Rotating Machinery*, Springer, 2009.
- [6] Schweitzer, G., *Characteristics of a magnetic rotor bearing for active vibration control*, First International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Paper C239/76, 1976.
- [7] Bleuler H., Schweitzer, G., *Dynamics of a magnetically suspended rotor with decentralized control*, IASTED Symposium on Applied Dynamics and Control, Copenhagen, June, 1983.
- [8] Bleuer, H., *Decentralized control of magnetic rotor bearing system*, Ph.D. Thesis, No. 7573, ETH Zurich, Switzerland, 1984.
- [9] McCallun, D. C., *Dynamic modelling and control of a magnetic bearing suspended rotor system*, Master Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1988.
- [10] Schweitzer, G., *Stabilization of self-excited rotor vibrations by an active damper*, In *Dynamics of Rotors* (ed. F. I. Niordson), Springer-Verlag, Berlin, 1974, pp. 139 – 144.
- [11] Salm, J., Schweitzer, G., *Modeling and control of a flexible rotor with magnetic bearings*, Conference Proceedings on Third International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, New York, September, 1984, pp. 553 – 561.
- [12] Salm, J., *Eine active magnetische Lagerung eines elastischen Rotors als Beispiel ordnungsreduziert Regelung grosser elastischer Systeme*, Tech. Rep. 1/162, VDI Fortschrittsberichte, 1988.

- [13] Herzog, R., *Ein Beitrag zur Regelung von magnetgelagerten Sysremen nittels positiv reller Funktionen un Hinf Optimierung*, PhD Thesis, No. 9399, ETH Zurich, Switzerland, 1991.
- [14] Larsonneur, R. *Design and control of AML systems for high speed rotation*, PhD Thesis, No. 9140, ETH Zurich, Switzerland, 1991.
- [15] Gähler, C., *Rotor dynamic testing and control with active magnetic bearings*, PhD Thesis, No. 12718, ETH Zurich, Switzerland, 1998.
- [16] Hongqi, T. *Robust control of a spindle-magnetic bearing system using sliding-mode control and variable structure system disturbance observer*, Journal of Vibration and Control, Vol. 5 (1999), pp. 277 – 298.
- [17] Jang, M. J., Chen, C. L., Tsao, Y. M., *Sliding model control for active magnetic bearing system with flexible rotor*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 342 (2005), pp. 404 – 419.
- [18] Lösch, F., *Identification and automated controller design for active magnetic bearing systems*, PhD Thesis, No. 14474, ETH Zurich, Switzerland, 2002.
- [19] Siegwart, R., Vischer, D., Larsonneur, R., *Control concepts for active magnetic bearings*, Proceedings of the 1st International Symposium on Magnetic Suspension Technology, Virginia, August, 19 – 23, 1991, pp. 401 – 422.
- [20] Fujiwara, H. et al., *Motion and vibration control of flexible rotor using magnetic bearings*, 8th International Symposium on Magnetic Bearings, Mito, Japan, 26 – 28 August, 2002, pp. 381 – 386.
- [21] Lei, S., Palazzolo, A., *Control of flexible rotor systems with active magnetic bearings*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 314 (2008), pp.19 – 38.
- [22] Kytka, P., Ehmann, C., Nordmann, R., *Comparison of model-based controller synthesis vs. PID-concept for position control of flexible structures*, Proceedings of International Congres on Machine Tools, Automation and Robotics in Mechanical Engineering (MATAR 2004), Prague, Czech Republic, 2004, pp. 71 – 77.
- [23] Jeon, S., Ahn, H. J., Han, D. C., *Model validation and controller design for vibration suppression of flexible rotor using AMB*, KSME International Journal, Vol. 16 (2002), pp. 1583 – 1593.
- [24] Shida, H., Ichihara, M., Seto, K., *Control of flexible rotors supported by active magnetic bearings*, 8th International Symposium on Magnetic Bearings, Mito, Japan, 26 – 28 August, 2002, pp. 145 – 150.
- [25] Tanaka, N., Uchiyama, N., Watanabe, T., Seto, K., *Levitation and vibration control of a flexible rotor by using active magnetic bearing*, Journal of System Design and Dynamics, Vol. 3 (2009), pp. 551 – 562.

- [26] Guojun, Y. et al., *Characteristic analysis of rotor dynamics and experiments of active magnetic bearing for HTR-10GT*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 237 (2007), pp. 1363 – 1371.
- [27] Fujita, M., Matsumura, F., Shimizu, M.,  *$H_\infty$  robust control design for a magnetic suspension system*, Proceedings of the 2nd International Symposium on Magnetic Bearings, Tokyo, Japan, 12 – 14 July, 1990, pp. 349 – 356.
- [28] Glover, K., McFarlane, D., *Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with  $H_\infty$  bounded uncertainty*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, pp. 821 – 830.
- [29] Driemeyer Franco, A.L., Bourles, H., De Pieri, E.R., *A robust nonlinear controller with application to a magnetic bearing system*, Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, Seville, Spain, 12 – 15 December, 2005, pp. 4927 – 4932.
- [30] Armstrong, E.S., *Robust controller design for flexible structures using normalized coprime factor uncertainty*, NASA Technical Paper 3325, Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1993.
- [31] Nonami, K., Wang, J.W., Sampei, M., Mita, T., *Active vibration control of a flexible rotor using  $H_\infty$  control theory*, JSME International Journal, Vol. 35 (1992), pp. 393 – 399.
- [32] Yu, H.C., Lin, Y.H., Chu, C.L., *Robust modal vibration suppression of a flexible rotor*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 21 (2007), pp. 334 – 347.
- [33] Lu, B., Choi, H., Buckner, G. D., Tammi, K., *Linear parameter-varying techniques for control of a magnetic bearing system*, Control Engineering Practice, Vol. 16 (2008), pp. 1161 – 1172.
- [34] Jastrzebski, R.P Hynynen, K.M., Smirnov, A.,  *$H_\infty$  control of active magnetic suspension*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 24 (2010), pp. 995 – 1006.
- [35] Chen, Y., Zhu, C., *Active vibration control based on linear matrix inequality for rotor systems under seismic excitation*, Journal of Sound and Vibration, Vol 314 (2008), pp. 53 – 69.
- [36] Skogestad, S., Postlethwaite. I., *Multivariable feedback control*, John Wiley & Sons, 1996.
- [37] Mohiuddin, M. A., Bettayeb, M., Khulief, Y.A., *Dynamic analysis and reduced order modelling of flexible rotor-bearing systems*, Computers and Structures, Vol. 69 (1998), pp. 349 – 359.
- [38] Moore, B.C., *Principal component analysis in linear systems: Controlability, observability and model reduction*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 26 (1981), pp. 17 – 32.

- [39] Kim, T., Maruta, I., Sugie, T., *PID controller tuning based on the constrained particle swarm optimization*, Automatica, Vol. 44 (2008), pp. 1104 – 1110.
- [40] Nelson, D., McVaugh, J. M., *The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements*, Journal of Engineering for industry, Paper Mo. 75-WA/DE-19, 1976, pp. 593 – 600.
- [41] Bathe, K. J., *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, USA, 1982.
- [42] Braut, S., *Analiza dinamike rotora pri dodiru rotora i statora*, Doktorska disertacija, Tehnički fakultet sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2006.
- [43] Swanson, E. E., et al, *Rotordynamic design audits of AML supported machinery*, Proceedings of the 37th Turbomachinery Symposium, 2008, pp. 133 – 158.
- [44] Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K., *Robus and optimal control*, Prentice Hall, 1996.
- [45] Astrom, K.J., Murray, R.M., *Feedback Systems – An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 1963.
- [46] Doyle, J., Francis, B., Tannenbaum, A., *Feedback control theory*, Macmillan Publishing Co., 1990.
- [47] Vukić, Z., Kuljača, L.J., *Automatsko upravljanje: analiza linearnih sustava*, Kiegen, Zagreb, 2005.
- [48] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P., P., Francis, B. A., *State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems*, IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 34 (1989), pp. 831 – 847.
- [49] Balas, G., Chiang, R., et al., *Robust control toolbox user's guide*, The MathWorks, Inc., Natick, 2005.
- [50] Mushi, S. E., Lin, Z., Allaire, P. E., *Design, construction and modeling of a flexible rotor active magnetic bearing test rig*, Proceedings of ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea and Air GT2010, Glasgow, UK, 14 – 18 June, 2010, pp. 1 – 10.
- [51] Schönhooff, U., et al., *Implementation results of  $\mu$  synthesis control for an energy storage flywheel*, Seventh International Symposium on magnetic bearings, ETH Zürich, 23 – 25 August, 2000, pp. 317 – 322.
- [52] Wang, F.C., Ko, C.C., *Multivariable robust PID control for a PEMFC system*, International Journal of Hydrogen Energy, Vol. 35 (2010), pp. 10437 – 10445.
- [53] Nijhuis, A. B. M., Schmied, J., Schultz, R. R., *Rotordynamic Design Considerations for a 23 MW Compressor with Magnetic Bearings*, IMechE Fluid Machinery Symposium, The Hague, Netherlands, 1999.

- [54] Genta, G., *Vibration of structures and machines: Practical aspects*, Third edition, Springer, New York, 1993.
- [55] Lalanne, M., Ferraris, G., *Rotordynamics prediction in machinery*, John Wiley & Sons, England, 1997.
- [56] ISO 1940-1:2003, *Mechanical vibration - Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state. Part 1: Specification and verification of balance tolerances*, 2003.
- [57] Braut, S., Žigulić, R., Butković, M., *Numerical and experimental analysis of a shaft bow influence on a rotor to stator contact dynamics*, Journal of Mechanical Engineering – Strojniški vestnik, Vol. 54 (2008), pp. 693 – 706.
- [58] ISO TC108/SC2, *Machinery vibration – Vibration of rotating machinery equipped with active magnetic bearings. Part 3: evaluation of stability margin*, ISO 14839-3, 2006.





## Popis oznaka i simbola

<i>Veličina</i>	<i>Jedinica</i>	<i>Opis</i>
$a, b$	m	udaljenost ležajeva A i B od težišta rotora
$A$	m <sup>2</sup>	površina jednog elektromagnetskog pola
$\mathbf{A}$	--	matrica sustava
$\mathbf{B}_a, \mathbf{B}_u$	--	ulazne matrice struje ležajeva i vanjskih sila
$\mathbf{C}$	--	izlazna matrica sustava
$\mathbf{D}$	--	globalna matrica prigušenja
$\tilde{\mathbf{D}}$	--	modalna matrica prigušenja
$\tilde{\mathbf{D}}_r$	--	reducirana modalna matrica prigušenja
$d$	m	promjer osovine
$\mathbf{d}_i$	--	ulazni poremećaji
$\mathbf{d}$	--	izlazni poremećaji
$e$	--	pogreška signala
$E$	GPa	modul elastičnosti
$f_{\text{amp}}$	Hz	granična frekvencija energetskog pretvarača
$f_{\text{notch}}$	Hz	granična frekvencija <i>notch</i> filtra
$f_{\text{senz}}$	Hz	granična frekvencija senzora
$f_R$	Hz	frekvencija rezonantnog izdizanja
$\mathbf{f}$	--	globalni vektor vanjskih sila
$\mathbf{f}_a$	N	vektor sila aktuatora
$\mathbf{f}_u$	N	vektor sila vanjskih poremećaja
$F_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})$	--	donja linearna transformacija razlomka od $\mathbf{P}$ i $\mathbf{K}$
$F_m$	N	magnetska sila
$F_{xA}, F_{xB}$	N	sile u ležajevima A i B
$g$	m/s <sup>2</sup>	ubrzanje sile teže
$G_{\text{notch}}$	--	prijenosna funkcija <i>notch</i> filtra
$G_{\text{senz}}$	--	prijenosna funkcija senzora

$G_{\text{PID}}(s)$	--	prijenosna funkcija PID regulatora
$G_{\text{PIDr}}(s)$	--	prijenosna funkcija realnog PID regulatora
$\mathbf{G}(s)$	--	matrica prijenosnih funkcija sustava
$\mathbf{G}$	--	globalna matrica giroskopskog utjecaja sustava
$\mathbf{G}_e$	--	matrica giroskopskog utjecaja konačnog elementa
$\mathbf{G}_p(s)$	--	matrica prijenosnih funkcija perturbiranog sustava
$\mathbf{G}_s$	--	matrica prijenosnih funkcija oblikovanog sustava
$\mathbf{G}_D$	--	globalna matrica giroskopskog utjecaja diskova
$\mathbf{G}_{Di}$	--	čvorna matrica giroskopskog utjecaja diskova
$\mathbf{G}_S$	--	globalna matrica giroskopskog utjecaja osovine
$\tilde{\mathbf{G}}$	--	modalna matrica giroskopskog utjecaja
$\tilde{\mathbf{G}}_r$	--	reducirana modalna matrica giroskopskog utjecaja
$\ \mathbf{G}(s)\ _\infty$	--	$H_\infty$ norma matrice prijenosnih funkcija $\mathbf{G}(s)$
$i$	A	struja u zavojnici
$i_0$	A	statička struja (engl. bias current)
$i_A, i_B$	A	struja u zavojnicama ležaja A i B
$i_x, i_y$	A	struja regulacije u smjeru osi $x$ i $y$
$I(s)$	A	Laplaceova transformacija struje
$I_n$	$\text{m}^4$	moment inercije poprečnog presjeka konačnog elementa
$J_0$	--	linearni kriterij ocjene kvalitete
$J_{dDi}, J_{dDi}$	$\text{kgm}^2$	momenti inercije diska oko uzdužne i poprečne osi
$J_{IAE}$	--	IAE integralni kriterij ocjene kvalitete
$J_{ITAE}$	--	ITAE integralni kriterij ocjene kvalitete
$J_{ISE}$	--	ISE integralni kriterij ocjene kvalitete
$J_{ITSE}$	--	ITSE integralni kriterij ocjene kvalitete
$J_I$	--	poboljšana integralna kvadratna ocjena kvalitete
$J_{pe}$	$\text{kgm}^2$	dinamički moment inercije konačnog elementa
$J_y$	$\text{kgm}^2$	dinamički moment inercije oko osi $y$
$k_i$	N/A	koeficijent sila-struja
$k_n$	N/A	koeficijenti Padéove aproksimacije
$k_s$	N/m	koeficijent sila-pomak

$k_{iA}, k_{iB}$	N/A	koeficijent sila-struja za ležaj A i B
$k_{sA}, k_{sB}$	N/m	koeficijent sila-pomak za ležaj A i B
$K_{senz}$	V/m	osjetljivost senzora
$K_p, K_i, K_d$	--	proporcionalno, integracijsko i derivacijsko pojačanje PID regulatora
<b>K</b>	--	globalna matrica krutosti sustava
<b>K<sub>e</sub></b>	--	matrica krutosti konačnog elementa
<b>K(s)</b>	--	matrica prijenosnih funkcija regulatora
<b>K<sub>si</sub></b>	--	čvorna matrica koeficijenata sila-pomak
<b>K<sub>ii</sub></b>	--	čvorna matrica koeficijenata sila-struja
<b>K<sub>s</sub></b>	--	globalna matrica koeficijenata sila-pomak
<b>K<sub>s</sub></b>	--	regulator projekiran za oblikovani sustav <b>G<sub>s</sub></b>
<b>K<sub>i</sub></b>	--	globalna matrica koeficijenata sila-struja
<b>K<sub>S</sub></b>	--	globalna matrica krutosti osovine
<b><math>\tilde{K}</math></b>	--	modalna matrica krutosti
<b><math>\tilde{K}_r</math></b>	--	reducirana modalna matrica krutosti
<b><math>\tilde{K}_{sr}</math></b>	--	reducirana modalna matrica koeficijeneta sila-pomak
<b><math>\tilde{K}_{ir}</math></b>	--	reducirana modalna matrica koeficijeneta sila-struja
$l_e$	m	duljina konačnog elementa
$L$	m	duljina osovine
$L_e$	--	Lagrangeova funkcija
<b>L</b>	--	pojačanje sustava u otvorenom krugu
$m$	kg	masa rotora
$m_{Di}$	kg	masa diska
$\tilde{m}$	kg	komponenta težine koja djeluje u smjeru gravitacijske sile
<b>M</b>	--	globalna matrica masa sustava
<b>M, N</b>	--	<i>coprime</i> faktori matrice prijenosnih funkcija
<b>M<sub>e</sub></b>	--	matrica masa konačnog elementa
<b>M<sub>D</sub></b>	--	globalna matrica masa diskova
<b>M<sub>Di</sub></b>	--	čvorna matrica masa diskova
<b>M<sub>S</sub></b>	--	globalna matrica masa osovine

$\tilde{\mathbf{M}}$	--	reducirana matrica masa
$n$	--	broj izlaza iz sustava
$n_z$	--	broj namotaja zavojnice
$n_e$	--	broj konačnih elemenata
$\mathbf{n}$	--	šumovi mjerenja
$N$	--	broj čvorova MKE modela
$n_{\max}$	okr/min	maksimalni broj okretaja rotora
$p$	Hz	pol sustava
$\mathbf{P}$	--	generalizirani model sustava
$\mathbf{r}$	--	referenca
$r_e$	m	polumjer konačnog elementa
$\mathbf{q}$	--	vektor čvornih pomaka konačnog elementa
$s$	m	radijalna zračnost između rotora i magneta
$s$	--	Laplaceov operator
$s_0$	m	maksimalna radijalna zračnost do prihvatnih ležajeva
$\mathbf{S}_o, \mathbf{S}_i$	--	ulazna i izlazna matrica osjetljivosti
$\mathbf{T}_o, \mathbf{T}_i$	--	ulazna i izlazna komplemetarna matrica osjetljivosti
$t$	s	vrijeme
$t_s$	s	vrijeme ustaljivanja procesa
$\mathbf{T}_s$	--	Booleanova matrica koja preslikava pomake
$\mathbf{T}_{zw}$	--	matrica težinskih funkcija od $\mathbf{z}$ prema $\mathbf{w}$
$u_e$	kgm	neuravnoteženje rotora
$u$	--	upravljački signal SISO sustava
$\mathbf{u}$	--	upravljački signal MIMO sustava
$u_i, v_i$	m	pomaci čvorova konačnih elemenata u smjeru osi $x$ i $y$
$\mathbf{v}$	--	izmjereni signal
$\mathbf{z}$	--	karakteristične unutarnje varijable sustava s pripadnim težinskim funkcijama
$x, y$	m	radijalni pomaci središta rotora
$x_A, x_B$	m	pomaci rotora na položaju ležajeva A i B
$\mathbf{w}$	--	vanjski utjecaji koji djeluju na sustav u zatvorenom krugu

$\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$	--	težinske funkcije predkompenzatora i postkompenzatora
$\mathbf{W}_e, \mathbf{W}_r, \mathbf{W}_u, \mathbf{W}_y$	--	matrice težinskih funkcija pogrešaka, referenci, regulacijskog signala i karakteristika sustava
$\mathbf{W}_a \Delta_a$	--	ukupna aditiva greška
$\mathbf{W}_I \Delta_I$	--	ukupna multiplikativna greška na izlazu
$\mathbf{W}_o \Delta_o$	--	ukupna multiplikativna greška na ulazu
$\mathbf{x}$	--	vektor stanja
$\mathbf{y}$	--	regulirana varijabla
$X(s)$	--	Laplaceova transformacija pomaka
$\alpha$	°	kut elektromagnetskog pola
$\alpha_i, \beta_i, \alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$	rad	kutovi zakreta čvorova konačnog elementa oko osi $x$ i $y$
$\gamma$	--	optimizacijski faktor
$\Delta(s)$	--	modeli nesigurnosti
$\Delta_a, \Delta_I, \Delta_o$	--	aditivne, multiplikativne ulazne i multiplikativne izlazne nesigurnosti
$\Delta_M, \Delta_N$	--	nesigurnosti coprime faktora $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ nominalnog modela $\mathbf{G}$
$\zeta_i$	--	omjer prigušenja $i$ -te forme vibriranja
$\zeta_{\text{notch}}$	--	prigušenje <i>notch</i> filtra
$\eta$	--	modalna koordinata
$\boldsymbol{\eta}_r$	--	vektor reduciranih modalnih koordinata
$\varphi$	rad	kut zakreta rotora oko težišta
$\boldsymbol{\varphi}$	--	vlastiti vektor
$\boldsymbol{\Phi}$	--	modalna matrica
$\boldsymbol{\Phi}_r$	--	reducirana modalna matrica
$\lambda$	Hz	vlastita frekvencija
$\mu_0$	Vs/Am	magnetska permeabilnost vakuuma
$\mu_e$	kg/m	masa po jedinicu duljine
$\Pi$	--	skup perturbiranih modela
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća
$\tau_1$	s	vremenska konstanta
$\omega$	Hz	vlastite vrijednosti
$\Omega$	rad/s	kutna brzina vrtnje rotora



## Popis slika

<b>Slika 1.1.</b> Osnovni princip rada AML s jednim stupnjem slobode gibanja (preuzeto iz [5]) ...	3
<b>Slika 1.2.</b> Shematski prikaz radijalnog AML.....	4
<b>Slika 1.3.</b> Standardna konfiguracija rotorskih sustava s AML .....	4
<b>Slika 2.1.</b> Osnovna geometrija elektromagneta.....	14
<b>Slika 2.2.</b> Kruti rotor oslonjen na dva radijalna AML .....	17
<b>Slika 2.3.</b> Gredni konačni element za prostornu analizu dinamike rotora .....	20
<b>Slika 2.4.</b> Campbellov dijagram neoslonjenog elastičnog rotora ( $\Omega_{fw}$ , $\Omega_{bw}$ su kritične brzine vezane redom uz naprednu i natražnu formu).....	26
<b>Slika 2.5.</b> Model AML rotorskog sustava u prostoru stanja .....	28
<b>Slika 3.1.</b> Shematski prikaz sheme upravljanja MIMO sustava .....	36
<b>Slika 3.2.</b> Rotorski sustav s AML s četiri decentralizirana PID regulatora (preuzeto iz [5]) .	36
<b>Slika 3.3.</b> Decentralizirana shema upravljanja.....	37
<b>Slika 3.4.</b> Frekvencijski odzivi: a) procesa s rezonantnim izdizanjem $f_R$ , b) <i>notch</i> filtra s frekvencijom $f_R$ , c) zajedničkog odziva procesa i filtra .....	38
<b>Slika 3.5.</b> Standardna konfiguracija sustava upravljanja .....	39
<b>Slika 3.6.</b> Opća konfiguracija sustava upravljanja .....	40
<b>Slika 3.7.</b> Izlazna multiplikativna (gore lijevo), ulazna multiplikativna (gore desno) i aditivna greška modeliranja (dolje).....	43
<b>Slika 3.8.</b> Nesigurnosti <i>coprime</i> faktora.....	45
<b>Slika 3.9.</b> Zatvoreni sustav s težinskom funkcijom karakteristika.....	48
<b>Slika 3.10.</b> S/T konfiguracija mješovite osjetljivosti .....	50
<b>Slika 3.11.</b> Oblikovani model s regulatorom .....	54

<b>Slika 4.1.</b> Geometrija konfiguracije izrađena u numeričkom programu (A – aktuatori, S – senzori).....	58
<b>Slika 4.2.</b> Dijagram toka izrade numeričkog modela u programskom paketu Matlab/ Simulink.....	61
<b>Slika 4.3.</b> Blokovski prikaz rotora oslonjenog na dva AML u zatvorenom krugu.....	62
<b>Slika 4.4.</b> Model senzora .....	63
<b>Slika 4.5.</b> Koordinatne osi AML .....	63
<b>Slika 4.6.</b> Model reference.....	64
<b>Slika 4.7.</b> a) Model PID regulatora s <i>notch</i> filtrima, b) Podsustav PID regulatora za svaku os regulacije .....	65
<b>Slika 4.8.</b> Model energetskog pretvarača.....	65
<b>Slika 4.9.</b> a) Uključivanje težine rotora u reducirani model, b) model rotora opisan pomoću matrica modela prostora stanja .....	66
<b>Slika 4.10.</b> a) Model sila neuravnoteženja s konstantnom i linearnom promjenom brzine vrtnje, b) Postotna raspodjela neuravnoteženja po odabranim masama za model s linearnom promjenom brzine vrtnje .....	67
<b>Slika 4.11.</b> Prva elastična forma vibriranja (vezana uz 1. konfiguraciju na slici 4.5) s naznačenim položajima modalnih čvorova .....	69
<b>Slika 4.12.</b> Konfiguracije ispitnog stola (MKE, Matlab) .....	70
<b>Slika 4.13.</b> Frekvencijski odziv 1. konfiguracije za prvi (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru – slika gore) i drugi (od aktuatora B u y smjeru, do pripadnog senzora B u y smjeru – slika dolje) kanal $4 \times 4$ MIMO neoslonjenog rotorskog sustava.....	71
<b>Slika 4.14.</b> Frekvencijski odziv 2. konfiguracije za prvi (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru – slika gore) i drugi (od aktuatora B u y smjeru, do pripadnog senzora B u y smjeru – slika dolje) kanal $4 \times 4$ MIMO neoslonjenog rotorskog sustava .....	72
<b>Slika 4.15.</b> Frekvencijski odziv 3. konfiguracije za prvi (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru – slika gore) i drugi (od aktuatora B u y smjeru, do pripadnog senzora B u y smjeru – slika dolje) kanal $4 \times 4$ MIMO neoslonjenog rotorskog sustava.....	73



<b>Slika 4.16.</b> Frekvencijski odziv 4. konfiguracije za prvi (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru – slika gore) i drugi (od aktuatora B u y smjeru, do pripadnog senzora B u y smjeru – slika dolje) kanal $4 \times 4$ MIMO neoslonjenog rotorskog sustava.....	74
<b>Slika 4.17.</b> Apsolutni modalni pomaci po iteracijama na položajima aktuatora ( $\circ$ , plavo) i senzora ( $\Delta$ , crveno) u 1. konfiguraciji za AML A (slika gore) i AML B (slika dolje) .....	75
<b>Slika 4.18.</b> Apsolutni modalni pomaci po iteracijama na položajima aktuatora ( $\circ$ , plavo) i senzora ( $\Delta$ , crveno) u 3. konfiguraciji za AML A (slika gore) i AML B (slika dolje) .....	76
<b>Slika 4.19.</b> Shematski prikaz postupka odabira rotorske konfiguracije s nekolokacijom.....	77
<b>Slika 4.20.</b> Forme vibriranja neoslonjenog rotora.....	78
<b>Slika 4.21.</b> Frekvencijski odziv za prvi kanal $4 \times 4$ MIMO neoslonjenog rotorskog sustava pri 0 okr/min (od aktuatora A u y smjeru, do pripadnog senzora A u y smjeru).....	79
<b>Slika 4.22.</b> Frekvencijski odziv za drugi kanal $4 \times 4$ MIMO neoslonjenog rotorskog sustava pri 0 okr/min (od aktuatora B u y-smjeru, do pripadnog senzora B u y-smjeru) ...	79
<b>Slika 4.23.</b> Polovi ( $\times$ ) i nule ( $\circ$ ) elastičnog rotora oslonjenog na AML .....	80
<b>Slika 4.24.</b> Campbellov dijagram.....	80
<b>Slika 5.1.</b> Ispitni stol: (1) radijalni AML A, (2) radijalni AML B, (3) elastična osovina, (4) disk 1, (5) disk 2 (6) elastična spojka, (7) elektromotor .....	84
<b>Slika 5.2.</b> a) Kućište AML sa statorskim zavojnicama i induktivnim sensorima, b) detalj senzora .....	85
<b>Slika 5.3.</b> Rotorski dio AML (lijevo) i poklopac kućišta s prihvatnim ležajevima (desno) ...	85
<b>Slika 5.4.</b> Bodeov dijagram energetskog pretvarača (od ulaznog napona upravljanja do izlazne struje u zavojnicama AML): simulacija (crveno), eksperiment (plavo) .....	87
<b>Slika 5.5.</b> Mjerenje vibracijskih pomaka na disku 2 .....	89
<b>Slika 5.6.</b> Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer mjerenja pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine.....	91
<b>Slika 5.7.</b> Spektralna mapa odziva rotora za vertikalni smjer mjerenja pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine.....	91

<b>Slika 5.8.</b> Spektralna mapa odziva rotora za horizontalni smjer mjerenja pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine.....	92
<b>Slika 5.9.</b> Spektralna mapa odziva rotora za vertikalni smjer mjerenja pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine .....	92
<b>Slika 5.10.</b> Radijalni pomaci rotora u horizontalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine .....	93
<b>Slika 5.11.</b> Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine .....	93
<b>Slika 5.12.</b> Promjena brzine vrtnje u vremenu pri ubrzavanju rotora od 0 do 100 Hz u 60 s .	93
<b>Slika 5.13.</b> Radijalni pomaci rotora u horizontalnom smjeru pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine .....	94
<b>Slika 5.14.</b> Radijalni pomaci rotora u vertikalnom smjeru pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine.....	94
<b>Slika 5.15.</b> Promjena brzine vrtnje u vremenu pri usporavanju rotora od 100 do 0 Hz u 120 s . .....	94
<b>Slika 5.16.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine .....	95
<b>Slika 5.17.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine .....	95
<b>Slika 5.18.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u horizontalnom smjeru pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine.....	96
<b>Slika 5.19.</b> Amplitude pomaka i fazni kut prvog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri zaustavljanju rotora uz prolazak prve kritične brzine.....	96
<b>Slika 5.20.</b> Izmjerene orbite rotora na položaju središnjeg diska pri odabranim brzinama vrtnje prilikom upućivanja rotora u pogon.....	97
<b>Slika 5.21.</b> Amplitude pomaka i fazni kut drugog harmonika rotora u vertikalnom smjeru pri upućivanju rotora u pogon uz prolazak prve kritične brzine .....	98

## Popis tablica

<b>Tablica 2.1.</b> Koeficijenti Padèove aproksimacije za redove $n = 1$ i $n = 2$ .....	30
<b>Tablica 3.1.</b> Integralni kriteriji optimalnosti .....	35
<b>Tablica 3.2.</b> Uvjeti robusne stabilnosti za nestrukturirane nesigurnosti MIMO sustava.....	47
<b>Tablica 4.1.</b> Usporedba numeričkih i eksperimentalnih vlastitih frekvencija prije i nakon njihovog usklađivanja .....	68
<b>Tablica 5.1.</b> Tehnički podaci ispitnog stola .....	86



## PRILOG A: Singularne vrijednosti

### A.1. Singularne vrijednosti

Singularne vrijednosti predstavljaju važan alat za analizu MIMO sustava. U ovom je poglavlju prikazana njihova fizikalna interpretacija pri primjeni na analizu frekvencijskog odziva MIMO sustava  $\mathbf{G}(s)$  sa  $m$  ulaza i  $l$  izlaza. Važno je naglasiti da je  $\mathbf{G}(j\omega)$  kompleksna matrica dimenzija  $l \times m$  koja se mijenja u ovisnosti o  $\omega$  i koja se primjenom metode dekompozicije singularnih vrijednosti (engl. *Singular Value Decomposition*), na fiksnoj frekvenciji  $\omega$ , može rastaviti na slijedeći oblik

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H. \quad (\text{A.1})$$

Pri tome vrijedi:

$\mathbf{\Sigma}$  je dijagonalna matrica dimenzija  $l \times m$  na čijoj su glavnoj dijagonali skalarne singularne vrijednosti  $\sigma_i$  koje se dobivaju kao pozitivni kvadratni korijeni vlastitih vrijednosti matrice  $\mathbf{G}^H\mathbf{G}$ :

$$\sigma_i(\mathbf{G}) = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{G}^H\mathbf{G})}. \quad (\text{A.2})$$

$\mathbf{U}$  je  $l \times l$  unitarna matrica<sup>10</sup> čiji su stupci izlazni singularni vektor,  $\mathbf{u}_i$ .

$\mathbf{V}$  je  $m \times m$  unitarna matrica čiji su stupci ulazni singularni vektori,  $\mathbf{v}_i$ .

Vektori matrice  $\mathbf{U}$  su ortonormalni (ortogonalni i jedinične duljine,  $\|\mathbf{u}_i\|_2 = 1$ ) te predstavljaju *izlazne smjerove* sustava. Vektori matrice  $\mathbf{V}$  imaju ista svojstva (ortogonalni, jedinične duljine,  $\|\mathbf{v}_i\|_2 = 1$ ) te predstavljaju *ulazne smjerove* sustava. S obzirom da je  $\mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , gornja jednačba se može zapisati u obliku  $\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}$ , odakle za  $i$ -ti stupac proizlazi:

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i. \quad (\text{A.3})$$

---

<sup>10</sup> Unitarna matrica je kvadratna kompleksna matrica dimenzija  $n \times n$  koja zadovoljava uvjet  $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}_{n \times n}$ , gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica, a  $\mathbf{U}^H$  konjugirano transponirana matrica od  $\mathbf{U}$ .

Taj se izraz može interpretirati na slijedeći način. Ukoliko se promatra ulaz u smjeru vektora  $\mathbf{v}_i$  tada je izlaz iz sustava u smjeru vektora  $\mathbf{u}_i$ . Osim toga, s obzirom da su veličine vektora  $\mathbf{u}_i$  i  $\mathbf{v}_i$  jedinične tada se pojačanje/prigušenje sustava može direktno opisati pomoću  $i$ -te singularne vrijednosti matrice  $\mathbf{G}$ :

$$\sigma_i(\mathbf{G}) = \|\mathbf{G}\mathbf{v}_i\|_2. \quad (\text{A.4})$$

## A.2. Analiza frekvencijskih odziva MIMO sustava

Frekvencijska domena predstavlja idealno okružje za analizu odziva MIMO sustava i pripadnih pojačanja u pojedinim ulazno-izlaznim parovima. Ukupni odziv MIMO sustava pri simultanom djelovanju ulaznih signala istih frekvencija na nekoliko ulaznih smjerova je, prema principu superpozicije, jednak sumi pojedinačnih odziva:

$$y_i(\omega) = g_{i1}(j\omega)d_1(\omega) + g_{i2}(j\omega)d_2(\omega) + \dots = \sum_j g_{ij}(j\omega)d_j(\omega), \quad (\text{A.5})$$

što u matričnom obliku glasi

$$y(\omega) = G(j\omega)d(\omega), \quad (\text{A.6})$$

gdje su  $y(\omega)$  i  $d(\omega)$  vektori ulaznih i izlaznih signala, respektivno.

U slučaju SISO sustava ( $y = Gd$ ) pojačanje na promatranoj frekvenciji se može jednostavno definirati kao:

$$\left| \frac{y(\omega)}{d(\omega)} \right| = \left| \frac{G(j\omega)d(\omega)}{d(\omega)} \right| = |G(j\omega)|. \quad (\text{A.7})$$

Pojačanje direktno ovisi o frekvenciji  $\omega$ , ali s obzirom da je sustav linearan ono je neovisno o amplitudi ulaznog signala  $|d(\omega)|$ .

Za razliku od SISO sustava, u slučaju MIMO sustava gdje su ulazni i izlazni signali vektori, amplitude signala se dobivaju pomoću prikladno odabranih normi. Ukoliko se kao mjera odabere 2-norma, koja je uobičajena mjera duljine, tada amplitude ulaznih i izlaznih signala iznose:

$$\|d(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_j |d_j(\omega)|^2} \quad (\text{A.8})$$

$$\|y(\omega)\|_2 = \sqrt{\sum_j |y_j(\omega)|^2}. \quad (\text{A.9})$$

U ovom je slučaju pojačanje sustava  $G(s)$  definirano kao omjer:

$$\frac{\|y(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)d(\omega)\|_2}{\|d(\omega)\|_2}. \quad (\text{A.10})$$

Može se uočiti da ono ovisi o frekvenciji  $\omega$ , ali je također neovisno o amplitudi ulaznog signala  $\|d(\omega)\|_2$ . Međutim, kako u slučaju MIMO sustava pojačanje ovisi i o smjeru ulaza  $d$ , najveće pojačanje za bilo koji ulazni smjer se, prema izrazu (A.4), može definirati kao maksimalna singularna vrijednost od  $G$ ,

$$\max_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \max_{\|d\|_2=1} \|Gd\|_2 = \bar{\sigma}(G), \quad (\text{A.11})$$

Na isti je način najmanje pojačanje definirano kao minimalna singularna vrijednost od  $G$ :

$$\min_{d \neq 0} \frac{\|Gd\|_2}{\|d\|_2} = \min_{\|d\|_2=1} \|Gd\|_2 = \underline{\sigma}(G). \quad (\text{A.12})$$





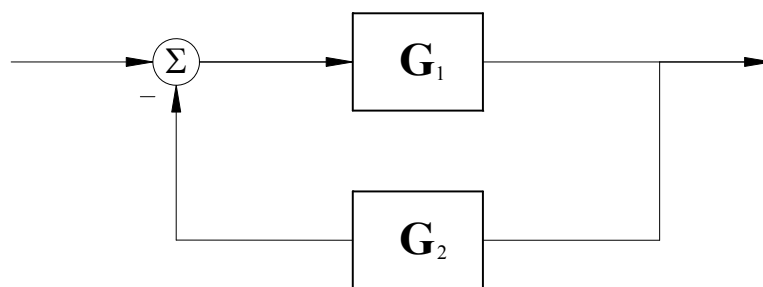
## PRILOG B: Nyquistov kriterij i teorem malog pojačanja

### B. 1. Nyquistov kriterij

Na slici B.1 prikazana je tipična konfiguracija SISO sustava s negativnom povratnom vezom, gdje su  $G_1(s)$  i  $G_2(s)$  prijenosne funkcije u glavnoj i povratnoj petlji. Stabilnost takvog sustava, čija je prijenosna funkcija

$$G_{cl}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}, \quad (\text{B.1})$$

može se odrediti primjenom grafo-analičke metode koja je poznatija pod nazivom Nyquistov kriterij stabilnosti.



Slika B.1. Konfiguracija sustava u povratnoj petlji

Tom se metodom, na temelju grafičkog prikaza prijenosne funkcije otvorene petlje  $L(s) = G_1(s)G_2(s)$  u kompleksnoj ravnini (Nyquistov dijagram), osigurava provjera smještaja polova zatvorenog sustava i određuje njegova stabilnost bez direktnog izračuna polova ( $1 + L(s) = 0$ ). Nyquistov kriterij se temelji na Cauchyjevom teoremu preslikavanja kontura u kompleksnoj ravnini<sup>11</sup> te glasi:

*Zatvoreni sustav s negativnom povratnom vezom i pojačanjem otvorene petlje  $L(s)$  je stabilan ako i samo ako Nyquistov dijagram od  $L(j\omega)$  obilazi kritičnu točku  $s_{krit} = -1$ , u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, onoliko puta koliko  $L(s)$  ima nestabilnih polova (polovi u desnoj poluravnini kompleksne ravnine).*

<sup>11</sup> Detaljnije u literaturi: Mandal, A. K., *Introduction to control engineering: modeling, analysis and control*, New age international (P) limited, New Delhi, 2006.

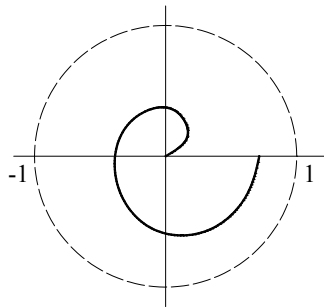
## B. 2. Teorem malog pojačanja

Teorem malog pojačanja (engl. *Small gain theorem*) proizlazi direktno iz Nyquistovog kriterija stabilnosti za sustav čija je struktura prikazana na slici B.1. Ako se pretpostavi da su  $G_1(s)$  i  $G_2(s)$  stabilni sustavi, tada će pripadni zatvoreni sustav biti stabilan ukoliko Nyquistov dijagram za  $L(s) = G_1(s)G_2(s)$  leži unutar jediničnog kruga i ne obilazi točku  $-1$  (slika B.2).

Drugim riječima, teorem malog pojačanja koji definira uvjet stabilnosti SISO sustava glasi:

$$\|L(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} |L(j\omega)| < 1, \quad (\text{B.2})$$

gdje "sup" označava supremum funkcije, koji se u većini slučajeva može poistovijetiti s njenim maksimumom. Ovaj uvjet osigurava da je pojačanje signala oko petlje manje od jedan uslijed čega se perturbacije koje se uvode u sustav smanjuju.



Slika B.2. Nyquistov dijagram sustava

U slučaju MIMO sustava teorem malog pojačanja je dan u obliku:

$$\|L(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(L(j\omega)) < 1. \quad (\text{B.3})$$

Direktna primjena ovog teorema na sintezu regulatora je nepovoljna iz razloga što se u niskofrekvencijskom području traže visoka pojačanja kako bi se osigurala dobra svojstva praćenja reference. Međutim, njegova bit dolazi do izražaja prilikom analize sustava upravljanja s nestrukturiranim nesigurnostima.

**PRILOG C: Numerički program – ispis iz komandnog prozora u okruženju Matlab**

Modeliranje i Upravljanje Elastičnog Rotora Oslonjenog na dva Aktivna Magnetska Ležaja (AML)

=====

-----  
1. Korak: Definiranje dimenzija rotora i materijala  
-----

Odabrati redni broj konfiguracije koja se analizira (default 1)

0 - unos proizvoljne konfiguracije

1 - (AML-DISK-AML) Osnovna konfiguracija

2 - (AML-DISK-AML-DISK) 1. disk na sredini, 2. na DE prepustu

3 - (DISK-AML-DISK-AML) 1. disk na NDE prepustu, 2. na sredini

4 - (DISK-AML-DISK-AML-DISK) 1. disk na NDE prepustu, 2. u sredini, 3. na DE prepustu,

5 - (DISK-AML-DISK-DISK-AML-DISK) 1. disk na NDE prepustu, 2. i 3. u sredini, 4. na DE prepustu

Udaljenost diska od AML A (na prepustu) (default 0.05 m):

Upisi geometrijske i materijalne karakteristike odabrane konfiguracije rotora:

Na koliko karakterističnih dijelova je podijeljena osovina (default 11)?

Duljina L1 (default 0.157):

Promjer D1 (default 0.025):

Duljina L2 (default 0.05):

Promjer D2 (default 0.025):

Duljina L3 (default 0.0725):

Promjer D3 (default 0.029):

Duljina L4 (default 0.056):

Promjer D4 (default 0.029):

Duljina L5 (default 0.0295):

Promjer D5 (default 0.029):

Duljina L6 (default 0.185):

Promjer D6 (default 0.025):

Duljina L7 (default 0.185):

Promjer D7 (default 0.025):

Duljina L8 (default 0.0725):

Promjer D8 (default 0.029):

Duljina L9 (default 0.056):

Promjer D9 (default 0.029):

Duljina L10 (default 0.0295):

Promjer D10 (default 0.029):

Duljina L11 (default 0.207):

Promjer D11 (default 0.025):

Koncentrirane mase (diskovi i AML) u ovoj konfiguraciji su redom:

1 masa (disk) = balansni disk

2 masa (disk) = AML A

3 masa (disk) = balansni disk

4 masa (disk) = AML B

Upisati karakteristike diskova u skladu s redoslijedom pojavljivanja (s lijeva na desno):

Vanjski promjer 1. diska (default 0.12):

Unutarnji promjer 1. diska (default 0.025):

Širina 1. diska (default 0.025):

Broj provrta na 1. disku (default 12):

Promjer provrta na 1. disku (default 0.0045):

Radijus na 1. disku na kojem se nalaze provrti (default 0.05):

Vanjski promjer 2. diska (default 0.111):

Unutarnji promjer 2. diska (default 0.029):

Širina 2. diska (default 0.116):

Broj provrta na 2. disku (default 0):

Vanjski promjer 3. diska (default 0.12):

Unutarnji promjer 3. diska (default 0.025):

Širina 3. diska (default 0.025):

Broj provrta na 3. disku (default 12):

Promjer provrta na 3. disku (default 0.0045):

Radijus na 3. disku na kojem se nalaze provrti (default 0.05):

Vanjski promjer 4. diska (default 0.111):

Unutarnji promjer 4. diska (default 0.029):

Širina 4. diska (default 0.116):

Broj provrta na 4. disku (default 0):

Modul elastičnosti (default 21000000000 Pa):

Gustoća rotora (default 7800 kg/m<sup>3</sup>):

Položaj u kojem se nalazi 1. aktuator (default 4):

Položaj u kojem se nalazi 1. senzor (default 5):

Položaj u kojem se nalazi 2. aktuator (default 9):

Položaj u kojem se nalazi 2. senzor (default 10):

Položaj u kojem se nalazi 1. disk (max. 12): 2

Položaj u kojem se nalazi 2. disk (max. 12): 7

---

## 2. Korak: Izrada MKE strukturnog modela

---

Broj elemenata na L1 (default 2):

Broj elemenata na L2 (default 1):

Broj elemenata na L3 (default 2):

Broj elemenata na L4 (default 2):

Broj elemenata na L5 (default 1):

Broj elemenata na L6 (default 2):

Broj elemenata na L7 (default 2):

Broj elemenata na L8 (default 2):  
Broj elemenata na L9 (default 2):  
Broj elemenata na L10 (default 1):  
Broj elemenata na L11 (default 3):

-----  
3. Korak: Modalna dekompozicija i redukcija MKE modela  
-----

Koliko elastičnih formi ulazi u model za upravljanje (default 3)?  
Koliko vlastitih frekvencija ispisati (default 7)?

0 Hz  
0 Hz  
66.7774 Hz  
165.4485 Hz  
281.9085 Hz  
472.4781 Hz  
547.187 Hz

Da li se traži grafički prikaz formi vibriranja (1 = DA, 2 = NE)? 2  
Da li se traži Campbellov dijagram (1 = DA, 2 = NE)? 2

-----  
4. Korak: Ugradnja aktivnih magnetskih ležajeva  
-----

Da li je rotor oslonjen na AMB (1 = DA, 2 = free-free)?  
Koeficijent sila-pomak (default Ks = 230000 N/m, orig. Ks = 680000 N/m)  
Koeficijent sila-pomak (default Ki = 450 N/m, orig. Ki = 190 N/m)  
Da li se modelira nekolokacija (1 = DA, 2 = NE)?  
Da li se traži odziv u frekvencijskoj domeni (1 = DA, 2 = NE)? 2

-----  
5. Korak: Unos karakteristika senzora i pojačala snage  
-----

Karakteristike senzora i pojačala se definišu u datoteci cont\_senzor\_poj.m



**PRILOG D: Numerički program – odabir konfiguracije sustava**

```

amloptim_geometrija
amloptim_konfiguracije
zeta = 0.01;
modes_control = 3
eps = 0.05;
omega = 0;
Lold = L;
Lnew = L;
L10=Lold(1)-poz_startA;
L70=Lold(7)-poz_startB;

% pokretanje algoritma za optimizaciju položaja AML
k = 1;
i = 1;
for i = L10:deltaL:Lold(1)+poz_endA           % L(2)+L(3)+L(4)=Laml=konst.
    Lnew(1)=i;
    Lnew(2)=prepust;
    Lnew(6)=Lold(1)+Lold(6)-i;
    for j = L70:deltaL:Lold(7)+poz_endB
        Lnew(7)=j;
        Lnew(11)=Lold(7)+Lold(11)-j;
        [M(:, :, k), C(:, :, k), G(:, :, k), K(:, :, k)] = ...
            amloptim_fem(E, density, N, Lnew, D, nel, nmasa, ...
                Du, Dv, Hh, nb, Db, rb, A_poz, S_poz, D_poz, kspojka, spojka_poz, omega);
        xnnew = amloptim_reducemax(M(:, :, k), C(:, :, k), G(:, :, k), ...
            K(:, :, k), modes_control);
        xnnew(:, :, k) = xnnew;

    load fem.mat
    if sign(xnnew(A_poznod(1), 3, k)) == sign(xnnew(S_poznod(1), 3, k)) & ...
        sign(xnnew(A_poznod(2), 3, k)) == sign(xnnew(S_poznod(2), 3, k)) & ...
        abs(xnnew(A_poznod(1), 3, k)) > eps & abs(xnnew(S_poznod(1), 3, k)) > eps &
        abs(xnnew(A_poznod(2), 3, k)) > eps & abs(xnnew(S_poznod(2), 3, k)) > eps
        optimA(1,1) = i-Lold(1);
        optimB(1,1) = j-Lold(6);
        phioptim(:, :, 1) = xnnew(:, :, k);
        nod_poz_metar(1, :, 1) = nod_poz_metar;
        fprintf(['(', num2str(1), ') AML A pomaknuti za ', num2str(i-Lold(1)), ...
            ' m, a AML B za ', num2str(j-Lold(7)), ' m. \n'])
        figure(1); Dg_forme(nod_poz_metar(1, :, 1), phioptim(:, :, 1)); hold on
        title(['(', num2str(1), ') AML A pomaknut za ', num2str(i-Lold(1)), ...
            ' m, a AML B za ', num2str(j-Lold(7)), ' m.'])
        l=l+1;
    else
end
end

```

```
        k = k+1;

    end

end

disp(['Predznak (-) označava pomak u smjeru NDE, a predznak (+)'...
      ' u smjeru DE (prema motoru).']);
```



## Životopis

Goranka Štimac je rođena 6. rujna 1982. u Rijeci. Osnovnu školu *Petar Zrinski* je završila 1996. godine u Čabru, a opću gimnaziju u srednjoj školi *Vladimir Nazor* također u Čabru te maturirala 2000. godine.

Sveučilišni studij strojarstva je upisala 2000. godine na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci. Bila je dobitnica nagrada i priznanja Tehničkog fakulteta za zalaganje i postignuti uspjeh tijekom studija te Rektorove nagrade za najboljeg studenta Tehničkog fakulteta. Diplomski rad "*Simulacija koncentracije onečišćenja zraka u okolici Rijeke*" je izradila pod mentorstvom red. prof. dr. sc. Zorana Mrše i diplomirala 2005. godine.

Nakon završetka studija, 2. svibnja 2006. zapošljava se na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci kao znanstveni novak na Zavodu za tehničku mehaniku, gdje sudjeluje u izvođenju vježbi iz kolegija Regulacija i upravljanje dinamičkim sustavima, Osnove mehatronike, Mehatronika, Dinamika, Kinematika i Mehanika II. U rujnu 2006. je upisala poslijediplomski znanstveni studij, smjer Računarska mehanika. Od 2006. do 2007. sudjelovala je kao član istraživačkog tima na znanstvenom projektu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa "*Nelinearna dinamika rotacijskih strojeva*", br. 0069-016, glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Mirka Butkovića, a od 2007. uključena je u rad na znanstvenom projektu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa "*Redukcija vibracija i buke strojeva mehatroničkim pristupom*", br. 069-0691736-1733, glavnog istraživača red. prof. dr. sc. Roberta Žigulića. Autor je ili koautor šesnaest znanstvenih radova objavljenih u domaćim ili stranim časopisima ili zbornicima radova, odnosno prezentiranih na domaćim ili inozemnim znanstvenim skupovima.

U ožujku 2009. prisustvovala je tečaju "*Design and implementation of the control algorithm on the testbed with active magnetic bearings*" u poduzeću Mecatronix (Darmstadt). Studijski boravak na stranoj znanstvenoj ustanovi u trajanju od četiri mjeseca, a u okviru *ERASMUS* razmjene, provela je 2010. na Tehničkom Sveučilištu u Lisabonu (*Instituto Superior Técnico, IST*).

Član je Hrvatskog Društva za Mehaniku (HDM) i Hrvatskog društva za teoriju strojeva i mehanizama (CroFToMM). Aktivno se služi engleskim jezikom, a pasivno njemačkim i slovenskim.



## PODACI O AUTORU I DOKTORSKOJ DISERTACIJI

### 1. AUTOR

Ime i prezime: Goranka Štimac

Datum i mjesto rođenja: 6.9.1982., Rijeka

Naziv fakulteta, studija i godina završetka dodiplomskog studija: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Sveučilišni studij strojarstva, 2005.

Naziv fakulteta, smjera i godina završetka poslijediplomskog studija: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Računarska mehanika, 2012.

Sadašnje zaposlenje: Znanstvena novakinja, Tehnički fakultet u Rijeci

### 2. DOKTORSKA DISERTACIJA

Naslov: Aktivno smanjenje vibracija kod rotacijskih strojeva

Broj stranica, slika, tablica i bibliografskih podataka: 121, 64, 5, 58

Znanstveno polje i grana: Strojstvo, opće strojarstvo; druge Temeljne tehničke znanosti, tehnička mehanika i mehanika fluida

Voditelj rada: Izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing.

Fakultet na kojem je rad odobren: Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

### 3. OBRANA I OCJENA

Datum prijave teme: 26.9.2008.

Datum predaje rada: 30.3.2012.

Datum prihvatanja ocjene rada: Red. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.

Sastav povjerenstva za ocjenu: Izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing.  
Doc. dr. sc. Neven Bulić, dipl. ing.

Datum obrane: Red. prof. dr. sc. Hinko Wolf, dipl. ing.

Sastav povjerenstva za obranu: Izv. prof. dr. sc. Sanjin Braut, dipl. ing.  
Doc. dr. sc. Neven Bulić, dipl. ing.

Datum promocije:

Oznaka: D.D.

UDK

.....